This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Im Teubnerschen Verlage erscheint unter obigem Titel in zwangloser Folge eine längere Reihe von zusammenfassenden ten Abschnitte der Mathematischen ıß ihrer Anwendungen.

welche der Plan, sowie die bis jetzt pädie der Mathematischen Wissen- ge Zustimmung, welche den von der veranlaßten und herausgegebenen Abschnitte der Mathematik zu teil ade jetzt, wo man die Resultate der underts zu überblicken bemüht ist, ssenden Darstellungen geltend macht, elforschungen auf den verschiedenen unter einheitlichen Gesichtspunkten zugänglich gemacht werden

ızyklopädie ebenso wie die Referate hen Mathematiker-Vereinigung be- pper, für eine rasche Orientierung Inhalt einer Disziplin an gesicherten ch sorgfältige Literaturangaben die n darzulegen. Darüber hinaus aber isen versehene Darstellung, wie sie n Quellenstudien unabhängigen Ein- ist, auch bei den breiter angelegten ker-Vereinigung, in welchen haupt- se auch das kritische Element zur Eine solche ausführliche Darlegung, nes auf geschichtlichen und litera- uches bewegt und neben den rein Interessen berücksichtigt, erscheint und dem Umfang des zu einem dergelegten Stoffes durchaus wichtig, ıkreich, bei uns in Deutschland die üchern über spezielle Gebiete der u reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner gibt sich der Hoffnung hin, daß sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiterschaft an dem Unternehmen entschließen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Enzyklopädie der Mathe-

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).

matischen Wissenschaften. Die umfangreichen literarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Enzyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Maße zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läßt, im gleichen Maße willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird (die bereits erschienenen Bände sind mit zwei **, die unter der Presse befindlichen mit einem * bezeichnet):

**P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. (Band X der Sammlung.)
M. Böcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
G. Bohlmann, Versicherungsmathematik.
G. H. Bryan, Lehrbuch der Thermodynamik.
G. Castelnuovo und F. Enriques, Theorie der algebraischen Flächen.
**E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. (Band IX.)
**L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [In englischer Sprache.] (Band VI.)
F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.
F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.
G. Eneström (in Verbindung mit andern Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.
F. Engel u. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der Transformationsgruppen.
F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.
A. Fischer, dynamische Probleme der Physiologie.
Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.
**A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. (Band VIII.)
M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.
J. Harkness, elliptische Funktionen.
L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.
K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.
E. Jahnke, Einführung in die Vektorrechnung.
G. Jung, Geometrie der Massen.
G. Kohn, rationale Kurven.
**A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen. (Band XII.)
H. Lamb, Akustik.
R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.

**G. Loria, spezielle, algebraische und transzendente Kurven der Ebene. Theorie und Geschichte. (Band V.)

A. E. H. Love, Lehrbuch der Hydrodynamik.

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität.

A. Loewy, Vorlesungen über die Theorie der linearen Substitutionsgruppen.

R. Mehmke, über graphisches Rechnen und über Rechenmaschinen, sowie über numerisches Rechnen.

W. Meyerhofer, die mathematischen Grundlagen der Chemie.

**E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. (Band VII.)

*W. F. Osgood, allgemeine Funktionentheorie.

E. Ovazza, aus dem Gebiete der Mechanik.

**E. Pascal, Determinanten. Theorie und Anwendungen. (Band III.)

S. Pincherle, Funktional-Gleichungen und -Operationen.

Fr. Pockels, Kristalloptik.

A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre. (Elementare Theorie der unendlichen Algorithmen und der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.) Bd. I. Zahlenlehre. Bd. II. Funktionenlehre. (Band I.)

*Schüssler, orthogonale Axonometrie.

C. Segre, Vorlesungen über algebraische Geometrie, mit besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Räume.

**D. Seliwanoff, Differenzenrechnung. (Band XIII.)

M. Simon, Elementargeometrie.

P. Stäckel, Lehrbuch der allgemeinen Dynamik.

P. Stäckel, Differentialgeometrie höherer Mannigfaltigkeiten.

O. Staude, Flächen und Flächensysteme zweiter Ordnung.

**O. Stolz und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik. (Band IV.)

**O. Stolz u. J. A. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie I. (Bd. XIV.)

R. Sturm, Theorie der geometrischen Verwandtschaften.

R. Sturm, die kubische Raumkurve.

H. E. Timerding, Theorie der Streckensysteme und Schrauben.

K. Th. Vahlen, Geschichte des Fundamentalsatzes der Algebra.

K. Th. Vahlen, Geschichte des Sturmschen Satzes.

A. Voss, Prinzipien der rationellen Mechanik.

A. Voss, Abbildung und Abwicklung der krummen Flächen.

**J. G. Wallentin, Einleitung in die Elektrizitätslehre. (Band XV.)

**E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung. (Band II.)

**A. G. Webster, the Dynamics of Particles, of rigid, elastic, and fluid Bodies being Lectures on Mathematical Physics. [In englischer Sprache.] (Band XI.)

A. Wiman, endliche Gruppen linearer Transformationen.

W. Wirtinger, algebraische Funktionen und ihre Integrale.

W. Wirtinger, partielle Differentialgleichungen.

H. G. Zeuthen, die abzählenden Methoden der Geometrie.

☞ Mitteilungen über weitere Bände werden baldigst folgen.

Leipzig, Poststraße 3.
Oktober 1904.

B. G. Teubner.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XIV, 2

EINLEITUNG IN DIE FUNKTIONENTHEORIE

VON

DR. OTTO STOLZ UND DR. J. ANTON GMEINER
K. K. HOFRAT, O. PROF. A. D. UNIVERS. INNSBRUCK — O. PROF. A. D. DEUTSCHEN UNIVERSITÄT PRAG

ZWEITE UMGEARBEITETE UND VERMEHRTE AUFLAGE
DER VON DEN VERFASSERN IN DER „THEORETISCHEN ARITHMETIK“
NICHT BERÜCKSICHTIGTEN ABSCHNITTE DER „VORLESUNGEN ÜBER
ALLGEMEINE ARITHMETIK“ VON O. STOLZ

IN 2 ABTEILUNGEN. II. ABTEILUNG

MIT 11 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905

Math 3609.04.3

HARVARD COLLEGE
DEC 6 1905
LIBRARY.

(XIV .2)

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorrede.

Dieses Buch enthält jene Teile der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz, welche von uns in die „theoretische Arithmetik" nicht aufgenommen wurden, in neuer Bearbeitung nebst einem Abschnitte (VII) über den Begriff der monogenen analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Weierstraß.

Schon in der „theoretischen Arithmetik"*) wurde die eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen eingeführt und verwendet; auf die Erklärung der Stetigkeit einer solchen Funktion brauchte dort jedoch nicht eingegangen zu werden. Nunmehr tritt dieser Begriff in den Vordergrund. Dabei kann die unabhängige Veränderliche, sowie die Funktion selbst, sowohl reell, als auch komplex sein. Die drei ersten Abschnitte unseres Werkes beschäftigen sich mit dem allgemeinen Begriffe der Funktionen und mit ihren Grenzwerten.

Vom IV. Abschnitte an wird, soweit es nach der Natur der Sache möglich ist, ein Unterschied zwischen reellen und komplexen Werten der Veränderlichen und Konstanten nicht mehr gemacht, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Darstellung erzielt wird.

Der IV. Abschnitt handelt von den ganzen rationalen Funktionen, der V. von den ganzen Potenzreihen. Eine bedeutende Umgestaltung weisen die Abschnitte VI, IX—XI auf, welche von Gmeiner neu bearbeitet sind. Der VI. gibt u. a. die Kriterien der Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen mit positiven Gliedern nach Pringsheim. Im IX. Abschnitte entwickeln wir die Lehre von den unendlichen Produkten, ohne von der aus den Logarithmen ihrer Faktoren gebildeten Reihe Gebrauch zu machen. Derselbe enthält ferner Sätze über die unendlichen Produkte, deren Faktoren von einer Veränderlichen abhängen, zumeist von Gmeiner im Anschlusse an eine Arbeit von Arzelà hergeleitet. Der X. Abschnitt ist den endlichen, der XI. den unendlichen Kettenbrüchen gewidmet. Diese beiden Abschnitte sind von Gmeiner ganz neu bearbeitet.

Der Inhalt des Buches ist zum größten Teile den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann gemeinsam. Denn mehrdeutige monogene Funktionen kommen, abgesehen von gelegent-

*) Sie ist in diesem Werke stets als „Arithmetik" angeführt.

licher Erwähnung, nur im VII. und VIII. Abschnitte vor. Der erstere bringt auch ihre Erklärung nach Weierstraß, welcher hierzu ein anderes Gebilde als die Ebene der komplexen Zahlen nicht benutzt; der letztere handelt von den Kreisfunktionen, worunter sich eben auch vieldeutige Funktionen, nämlich der Logarithmus, die Potenz mit nicht-ganzem Exponenten, der Arcus tangens, der Arcus sinus befinden. Wir betonen schon an dieser Stelle, daß wir die Bezeichnungen lx, x^a, $\sqrt[m]{x}$, arc tan x, arc sin x ausschließlich den Hauptwerten dieser Ausdrücke vorbehalten haben.

Sämtliche Abschnitte sind mit zugehörigen Übungen versehen.

An dieses Werk schließt sich unmittelbar der 2. Band der „Grundzüge der Differential- und Integralrechnung“ von Stolz an, welcher die komplexe Differential- und Integralrechnung enthält. Die letztere liefert ebenfalls Beweise für drei Sätze von hoher Wichtigkeit, den Cauchyschen Satz über die Koeffizienten einer Reihe nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen S. 201, den Satz 1) nach Cauchy S. 323 und den Laurentschen Satz, von welchem hier nur ein besonderer Fall in VII. 13 gegeben ist. Bekanntlich wurden diese Sätze gerade durch komplexe Integrationen gefunden und zwar der zweite in einer allgemeineren Form, als er hier vorgetragen werden kann.

Stolz. Gmeiner.

Inhaltsverzeichnis.

VI. Abschnitt.

Kriterien für die Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe beim Übergang zum Konvergenzkreise.

Seite

1. Das Prinzip der Reihenvergleichung. Allgemeines über die Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern 243
2. Vergleichung der Stärke der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern 246
3. Darstellung der Reihen mit positiven Gliedern mittels monotoner Funktionen der Veränderlichen n 247
4. Logarithmische Relationen 252
5. Divergenzkriterien erster Art 256
6. Konvergenzkriterien erster Art 259
7. Kriterien zweiter Art 261
8. Geordnete Folgen von disjunktiven Kriterien zweiter Art 265
9. Umformung der Kriterien zweiter Art für den Fall, daß $\lim(a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1$ ist 267
10. Anwendung der vorstehenden Sätze auf den Fall, daß der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich auf eine gewisse Form bringen läßt 270
11. Kriterien für alternierende Reihen 272
12. Sätze über die Konvergenz und Divergenz von Reihen mit komplexen Gliedern von der Form $b_n a_n$ 274
13. Kriterien der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit komplexen Gliedern a_n im Falle, daß der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich in eine ganze Potenzreihe von $1 : n$ entwickeln läßt 277
14. Verhalten der ganzen Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise im Falle, daß ihre Koeffizienten die in Nr. 13 erwähnte Bedingung erfüllen . . . 284
15. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ beim Übergange des x zu einem Randpunkte ihres Konvergenzbereiches, für welchen die Reihe konvergiert 286
16. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ beim Übergange des x zu einem Randpunkte ihres Konvergenzbereiches, für welchen die Reihe divergiert 289

Übungen zum VI. Abschnitte 293

VII. Abschnitt.

Begriff der monogenen analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Weierstraß.

1. Die ganze Potenzreihe als Funktionselement 302
2. Weitere Sätze über die aus einer ganzen Potenzreihe von $x - a$ abgeleiteten Potenzreihen 303

Seite

3. Über Funktionen, welche in allen Punkten einer endlichen regulären Linie eindeutig erklärt und dabei holomorph sind 305
4. Die Fortsetzung der Summe einer ganzen Potenzreihe von $x - a$ längs einer von a ausgehenden endlichen Linie 309
5. Die Fortsetzung der Summe einer ganzen Potenzreihe von $x - a$ längs einer von a ausgehenden und ins Unendliche sich erstreckenden Linie 311
6. Noch zwei Sätze über die Summe einer ganzen Potenzreihe 314
7. Die monogene analytische Funktion. Das Funktionselement 316
8. Ein- und mehrdeutige monogene analytische Funktionen 317
9. Über das Verhältnis der Begriffe: „analytischer Ausdruck" und „eindeutige monogene Funktion" zueinander 319
10. Die Eindeutigkeit einer monogenen Funktion in einem einfach begrenzten Bereiche 320
11. Einige Folgerungen aus den Sätzen von Nr. 10 323
12. Die am nächsten liegenden Entstehungsweisen von monogenen Funktionen 326
13. Ein besonderer Fall des Laurentschen Satzes 327
14. Monogene Funktionen, die für alle endlichen Werte von x entweder holo- oder meromorph sind 330

Übungen zum VII. Abschnitt 332

VIII. Abschnitt.

Die Kreisfunktionen für komplexe Werte des Arguments.

1. Potenzen mit komplexer Basis und reellem Exponenten 336
2. Erweiterung der in Nr. 1 behandelten Aufgabe auf komplexe Werte des Arguments 340
3. Potenzen mit komplexen Exponenten 341
4. Die natürliche Potenz oder die Exponentialfunktion 344
5. Die Koordinaten von $e^{\xi i}$. Entwicklung von $\cos\xi$ und $\sin\xi$ in ganze Potenzreihen 345
6. Erklärung der trigonometrischen Funktionen für komplexe Werte des Arguments 347
7. Der natürliche Logarithmus und sein Hauptwert 349
7*. Der Logarithmus als Funktion seines Arguments 352
8. Die allgemeine oder künstliche Potenz. Die Potenzfunktion 355
9. Die binomische und die logarithmische Reihe 356
9*. Der Logarithmus Lx eine monogene Funktion von x 360
10. Zerlegung der binomischen und der logarithmischen Reihe in den reellen und imaginären Teil 363
11. Der Arcus tangens 365
12. Der Arcus sinus 370
13. Der Arcus sinus x eine monogene Funktion von x 373
14. Ganze Potenzreihen für einige zusammengesetzte Funktionen 377
15. Die ganzen Potenzreihen für $\cos(s \arcsin x)$ und $\sin(s \arcsin x)$ 381
16. Asymptotischer Ausdruck für die Summe der nämlichen Potenzen der natürlichen Zahlen im Falle, daß die ins Unendliche fortgesetzte Reihe derselben divergiert 384

Übungen zum VIII. Abschnitt 390

IX. Abschnitt.

Die unendlichen Produkte.

1. Konvergenz und Divergenz der unendlichen Produkte 400
2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Produkte 403

Seite

3. Unendliche Produkte aus reellen Faktoren 407
4. Unbedingte Konvergenz unendlicher Produkte 411
5. Weitere Eigenschaften der unbedingt konvergenten unendlichen Produkte 416
6. Unendliche Produkte, deren Faktoren von einer Veränderlichen abhängen 418
7. Fortsetzung. Gleichmäßige Konvergenz unendlicher Produkte, welche von einer Veränderlichen abhängen 425
8. Bedingt konvergente unendliche Produkte 436
9. Die unendlichen Produkte für den Sinus und Kosinus 439
10. Die Entwicklung der Funktionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ in Partialbrüche 444
11. Die ganzen Potenzreihen für die Funktionen $x \cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$ . . 446
12. Einiges über die Bernoullischen Zahlen 449
13. Die ganze Potenzreihe für $\sec x$. Eulersche Zahlen 451
14. Die ganzen Potenzreihen für $l \sin x$ und $l \cos x$ 453
15. Entwicklung der Funktionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ in Reihen nach ganzen Potenzen von x 455

Übungen zum IX. Abschnitt 456

X. Abschnitt.

Die endlichen Kettenbrüche.

1. Kettenbrüche im engeren Sinne 465
2. Kettenbrüche im weiteren Sinne 468
3. Die Näherungsbrüche 470
4. Verallgemeinerung der in Nr. 3 aufgestellten Rekursionsformeln für die Näherungsbrüche 474
5. Differenzen der Näherungsbrüche 477
6. Folgerungen aus den Resultaten der vorigen Nummer 479
7. Transformation eines Kettenbruches in einen äquivalenten Ausdruck . . 483
8. Kontraktion eines Kettenbruches 487
9. Kettenbrüche, deren Teilzähler und Teilnenner sämtlich positiv sind . . 490
10. Die regelmäßigen Kettenbrüche 491
11. Kettenbrüche mit positiven Teilnennern und negativen Teilzählern . . 495
12. Die reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche 497
13. Aufsteigende Kettenbrüche 500

XI. Abschnitt.

Die unendlichen Kettenbrüche.

1. Allgemeine Erklärungen 505
2. Konvergenz und Divergenz der unendlichen Kettenbrüche 507
3. Unendliche Kettenbrüche aus lauter positiven Elementen 511
4. Die regelmäßigen unendlichen Kettenbrüche 518
5. Unendliche Kettenbrüche mit positiven Teilnennern und negativen Teilzählern 522
6. Bedingte und unbedingte Konvergenz von Kettenbrüchen 528
7. Alternierende unendliche Kettenbrüche 533
8. Konvergente Kettenbrüche mit komplexen Elementen. Konvergenzsätze von Pringsheim 538
9. Fortsetzung. Satz nach Van Vleck 544
10. Die periodischen Kettenbrüche 550
11. Divergenzkriterien für periodische Kettenbrüche 559

Seite

12. Beispiele von rein periodischen Kettenbrüchen aus reellen Elementen . 560
13. Periodizität des regelmäßigen Kettenbruches, in den sich jede irrationale reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten entwickeln läßt 566
14. Der Legendresche Irrationalitätssatz 570
15. Verwandlung einer unendlichen Reihe in einen unendlichen Kettenbruch 573
16. Verwandlung des Quotienten zweier ganzen Potenzreihen in einen Kettenbruch 577
17. Anwendungen 579

Übungen zum X. und XI. Abschnitt 583
Berichtigungen zur „Theoretischen Arithmetik“ 591
Berichtigungen und Nachträge 592
Sachenverzeichnis 595

VI. Abschnitt.

Kriterien für die Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe beim Übergang zum Konvergenzkreise.

1. Das Prinzip der Reihenvergleichung. Allgemeines über die Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern.

Nach „Arithmetik" IX, 2 und XIII, 3 ist zur Konvergenz einer unendlichen Reihe mit reellen oder komplexen Gliedern

$$\sum a_n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

deren Teilsummen wir mit s_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnen, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine ebensolche μ derart gebe, daß neben $n > \mu$

$$|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

ist. Will man aber diese Bedingung dazu verwenden, um zu entscheiden, ob eine beliebig vorgelegte unendliche Reihe konvergent oder divergent sei, so zeigt es sich, daß man auf diesem Wege nur in einigen wenigen Fällen zum Ziele gelangt. Dieser Umstand hat zur Aufstellung von solchen Konvergenz- und Divergenzkriterien Anlaß gegeben, welche zwar hinreichende, jedoch nicht notwendige Bedingungen für die Konvergenz bezw. Divergenz einer unendlichen Reihe enthalten.

Da nach „Arithmetik" XIII, 5 eine unendliche Reihe jedenfalls dann konvergiert, wenn die absoluten Beträge ihrer Glieder eine konvergente Reihe bilden (absolute Konvergenz), so kommt den Kriterien für Reihen mit positiven Gliedern besondere Wichtigkeit zu. Von den letzteren allein wird von hier an bis einschließlich Nr. 9 die Rede sein.

Das Grundprinzip, auf das sich jede solche Kriterienbildung zurückführen läßt, besteht in der gliedweisen Vergleichung der zu untersuchenden Reihe mit einer anderen, deren Konvergenz oder Divergenz schon feststeht, und die kurz die Vergleichsreihe heißen soll. Die

Möglichkeit, auf diesem Wege zu Konvergenz- und Divergenzkriterien zu gelangen, beruht auf dem folgenden, schon in „Arithmetik" IX, 4 aufgestellten Satze:

„Ist die Reihe mit positiven Gliedern Σc_n konvergent und bedeuten $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_n, \cdots$ positive Zahlen, welche sämtlich unter einer positiven Zahl C liegen, so konvergiert auch die Reihe $\Sigma \gamma_n c_n$; wenn dagegen Σc_n divergiert und die Zahlen γ_n sämtlich über einer positiven Zahl C' liegen, so divergiert ebenso die Reihe $\Sigma \gamma_n c_n$."

In dieser Form des Satzes kommt jedoch das Prinzip der Reihenvergleichung noch nicht mit voller Klarheit zum Ausdrucke. Deutlicher tritt dasselbe hervor, indem man dem Satze die folgende Fassung verleiht:

Satz. „Ist Σc_n eine konvergente, Σd_n eine divergente und Σa_n eine beliebige Reihe mit positiven Gliedern, so konvergiert die Reihe Σa_n, wenn es eine positive Zahl C und eine ganzzahlige Konstante k derart gibt, daß von einem bestimmten Werte m des Zeigers n angefangen für alle $n \geqq m$

$$a_{n+k} : c_n < C \tag{2}$$

ist; dagegen divergiert dieselbe, wenn eine positive Zahl C' von der Beschaffenheit existiert, daß für alle $n \geqq m$

$$a_{n+k} : d_n > C' \tag{3}$$

ist."

Die Ungleichungen (2) und (3) kann man offenbar auch durch

$$\overline{\lim}\,(a_{n+k} : c_n) < C, \text{ bezw. } \underline{\lim}\,(a_{n+k} : d_n) > 0 \tag{4}$$

ersetzen, wenn mit $\overline{\lim}$ nach Pringsheim[1]) die obere, mit $\underline{\lim}$ die untere Unbestimmtheitsgrenze des hinter diesem Zeichen stehenden Ausdruckes bei $\lim n = +\infty$ bezeichnet wird.

In der vorstehenden Form ausgesprochen stellt der Satz bereits ein allgemeines Kriterienpaar dar, aus dem sich besondere Kriterien sofort dadurch ergeben, daß man für die Reihen Σc_n und Σd_n je eine bestimmte Wahl trifft.

Über die Gestalt der Konvergenz- und Divergenzkriterien läßt sich im allgemeinen sagen, daß jedes derselben aus einem oder mehreren Ausdrücken von der Form

$$F(n;\ a_{n+k},\ a_{n+k+1}, \cdots a_{n+k+p}) \tag{5}$$

besteht, welche dadurch, daß sie bei unbegrenzt wachsendem n je einer bestimmten Bedingung genügen, die Konvergenz oder Divergenz der Reihe Σa_n anzeigen. Hierbei bedeutet F irgend eine Funktion

---

1) Münch. Sitzb. 28. S. 62. Über die Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$ vgl. Arithmetik VII, 16.

der in der Klammer stehenden Größen, während p eine natürliche Zahl oder Null ist.

Die gebräuchlichsten in der Anwendung bequemsten Kriterien reduzieren sich auf einen einzigen Ausdruck (5), in welchem neben n entweder nur das allgemeine Glied a_{n+k} der Reihe Σa_n oder der Quotient zweier unmittelbar aufeinander folgenden Glieder dieser Reihe auftritt, und werden nach P. du Bois-Reymond als Kriterien erster, bezw. zweiter Art bezeichnet.[1])

Ein allgemeines Kriterienpaar für Reihen mit positiven Gliedern hat zuerst Kummer aufgestellt und dabei gezeigt, daß dasselbe zur Bestimmung der Konvergenz oder Divergenz einer jeden solchen Reihe ausreiche[2]), d. h. daß es für jede Reihe mit positiven Gliedern ein wirksames Konvergenz- oder Divergenzkriterium von der von ihm angegebenen Form geben müsse. Hierdurch hat Kummer auch den ersten Grund gelegt zu einer eigentlichen Theorie der Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern, wie sie später durch die Arbeiten von Dini, P. du Bois-Reymond und Pringsheim geschaffen wurde.[3])

Als die wichtigste Aufgabe dieser Theorie erscheint es, solche allgemeine Kriterienformen aufzustellen, welche nicht nur die bereits bekannten besonderen Kriterien als besondere Fälle in sich enthalten, sondern auch die Eigenschaft besitzen, daß sich auf jedes darin enthaltene besondere Kriterium eine geordnete Folge von Konvergenz- bezw. Divergenzkriterien in leicht zu übersehender Weise aufbauen läßt. Darunter ist zu verstehen eine unbegrenzte Folge von Konvergenz- oder Divergenzkriterien von der Beschaffenheit, daß, wenn eines dieser Kriterien die Konvergenz bezw. Divergenz einer Reihe Σa_n anzeigt, auch alle folgenden dasselbe leisten, wenn aber eines versagt, vielleicht ein späteres Glied der Folge die Entscheidung herbeiführt. Kurz können wir diesen Sachverhalt ausdrücken, indem wir sagen, die geordnete Folge schreite von schwächeren zu immer schärferen oder wirksameren Kriterien vorwärts. Da die schwächeren Kriterien nur dann Bedeutung haben, wenn sie besonders einfach und daher für die Anwendung bequem sind, so braucht eine geordnete Folge von Kriterien nur nach der Seite der schärferen, nicht aber nach jener der schwächeren Kriterien hin unbegrenzt fortsetzbar zu sein.

---

1) Paul du Bois-Reymond, Journal f. Math. Bd. 76 (1873), S. 61.

2) E. E. Kummer, Journal f. Math. Bd. 13 (1835), S. 171—184.

3) U. Dini, „Sulle serie a termini positivi", Pisa 1867. — P. du Bois-Reymond a. a. O. S. 61—91. — A. Pringsheim, Math. Annalen Bd. 35 (1890), S. 297—394. (Vgl. auch Pringsheim, Encyklopädie I, S. 71—91.)

2. Vergleichung der Stärke der Divergenz und Konvergenz von Reihen mit positiven Gliedern.

Es seien

$$A \equiv \sum_0^\infty {}_r a_r \quad \text{und} \quad A' \equiv \sum_0^\infty {}_r a'_r \tag{1}$$

zwei beliebige Reihen mit positiven Gliedern und s_n bezw. s'_n seien ihre Teilsummen, so daß

$$s_n = \sum_0^n {}_r a_r, \qquad s'_n = \sum_0^n {}_r a'_r \tag{2}$$

ist. Lassen wir dann zunächst die Reihe A' divergent sein und nehmen an, daß entweder für alle Werte von n oder doch von einer bestimmten Stelle $n = m$ angefangen

$$s_n \geqq s'_n$$

sei, so divergiert offenbar auch die Reihe A. Insbesondere trifft dies zu, wenn

$$\lim_{n=+\infty} (s_n : s'_n) = +\infty$$

ist, und wir sagen in diesem Falle, die Reihe A sei stärker divergent als A' (A' schwächer divergent als A).[1])

Aus dieser Erklärung folgt sofort, daß, wenn A stärker als A' und A' stärker als eine dritte Reihe A'' divergiert, A auch stärker als A'' divergent ist. Außerdem besteht noch der Satz:

Satz 1. Wenn die Reihe A' divergiert und

$$\lim_{n=+\infty} (a_n : a'_n) = +\infty$$

ist, so divergiert auch die Reihe A und zwar stärker als A'.

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich zunächst mittels des Satzes in Nr. 1, daß die Reihe A divergiert. Ferner hat man nach dem Satze 1) in I, 11, S. 31

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \lim_{n=+\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{s'_n - s'_{n-1}} = \lim_{n=+\infty} \frac{s_n}{s'_n} = +\infty.$$

---

1) Vgl. E. Cesaro, Nouv. Ann. de Math., 3. Serie, VII. Bd. (1888), S. 55. Die divergenten Reihen A und A' sind nach Cesaro gleich stark (également) divergent, wenn der Quotient $s_n : s'_n$ einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert hat. — Nach Pringsheim (a. a. O. S. 319) heißt A schwächer divergent als A', wenn der genannte Grenzwert kleiner als 1 ist. Als gleich stark divergent erscheinen dann nur zwei divergente Reihen, für welche $\lim (s_n : s'_n) = 1$ ist. — Die Disjunktion „schwächer, gleichstark, stärker divergent" ist weder im einen noch im andern Falle eine vollständige; denn es kann $s_n : s'_n$ beispielsweise auch zwei voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen besitzen, von denen die eine Null, die andere $+\infty$ ist. — Das Entsprechende gilt auch bezüglich der konvergenten Reihen.

Um ein ähnliches Resultat auch für konvergente Reihen zu erreichen, muß man an Stelle der Teilsummen die Reihenreste

$$r_n = \sum_{n+1}^{\infty} a_r, \qquad r'_n = \sum_{n+1}^{\infty} a'_r \tag{3}$$

ins Auge fassen. Die Konvergenz der beiden Reihen (1) vorausgesetzt, sind r_n und r'_n monotone Funktionen von n, die bei wachsendem n beständig abnehmen und für $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null haben. Die beiden Reihen können daher so beschaffen sein, daß

$$\lim_{n=+\infty} (r_n : r'_n) = 0$$

ist. Wenn dies zutrifft, so soll die Reihe A stärker konvergent als A' (A' schwächer konvergent als A) heißen. Daraus ergibt sich dann wieder, daß, wenn A stärker als A' und A' stärker als eine dritte Reihe A'' konvergiert, auch A stärker als A'' konvergent ist. Auch gilt der dem Satze 1 analoge Satz:

Satz 2. Wenn die Reihe A' konvergiert und

$$\lim_{n=+\infty} (a_n : a'_n) = 0 \tag{4}$$

ist, so konvergiert auch die Reihe A und zwar stärker als A'.

Denn auf Grund der Voraussetzung (4) sagt uns zunächst der Satz von Nr. 1, daß neben der Reihe A' auch die Reihe A konvergiert. Demnach hat jede der beiden durch die Formeln (3) erklärten Funktionen r_n und r'_n einen Sinn und wir können jetzt nach dem Satze 2. S. 32 schließen, daß

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \lim_{n=+\infty} \frac{r_{n-1} - r_n}{r'_{n-1} - r'_n} = \lim_{n=+\infty} \frac{r_n}{r'_n} = 0$$

ist. Hiermit ist aber der in Rede stehende Satz bewiesen.

3. Darstellung der Reihen mit positiven Gliedern mittels monotoner Funktionen der Veränderlichen n.

Behufs Herleitung geordneter Kriterienfolgen erweist es sich als zweckmäßig, die Glieder der unendlichen Reihen durch monotone Funktionen des Stellenzeigers n auszudrücken, und zwar eignen sich hierzu solche monotone Funktionen von n, welche entweder mit n zugleich beständig zunehmen und bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ haben, oder aber bei wachsendem n beständig abnehmen und bei $\lim n = +\infty$ zur Null konvergieren. Der Kürze wegen wollen wir diese Funktionen als monotone Funktionen erster, bezw. zweiter Art bezeichnen.

Darstellungen der hier verlangten Art für Reihen mit positiven Gliedern ergeben sich unmittelbar aus den Betrachtungen der vorigen Nummer.

Ist nämlich die Reihe A in Nr. 2 divergent, so bilden die Teilsummen s_n eine monotone Funktion erster Art und man kann die Reihe in der Form

$$a_0 + \sum_1^\infty{}_n (s_n - s_{n-1}) \tag{5}$$

anschreiben; ist dagegen A konvergent, so bilden die Reihenreste r_n eine monotone Funktion zweiter Art und die Reihe läßt sich unmittelbar in die Gestalt

$$a_0 + \sum_1^\infty{}_n (r_{n-1} - r_n) \tag{6}$$

bringen. Bedenkt man nun, daß im ersteren Falle $1 : s_n$ eine monotone Funktion zweiter Art und im letzteren Falle $1 : r_n$ eine solche erster Art ist, so erkennt man, daß sich jede Reihe mit positiven Gliedern sowohl durch monotone Funktionen erster als auch durch solche zweiter Art darstellen läßt.

Die Darstellung einer konvergenten Reihe durch monotone Funktionen der zweiten Art hat schon Dini (a. a. O.), wenn auch nicht ausdrücklich, so doch dem Prinzipe nach benützt. Ausdrücklich geschieht dies bei P. du Bois-Reymond (a. a. O.), welcher den obigen Formeln (5) und (6) entsprechend die divergenten Reihen durch monotone Funktionen der ersten Art, die konvergenten durch solche der zweiten Art darstellt.

Pringsheim hat jedoch (a. a. O.) bemerkt, daß es vorteilhafter sei, für die divergenten und für die konvergenten Reihen die nämliche Art von monotonen Funktionen zu verwenden. Wir wählen hierfür mit Pringsheim jene erster Art. Es gelten dann die folgenden Sätze, in denen, sowie in den folgenden Nr. 4—8, μ_n überhaupt eine für alle in Betracht kommenden Werte von n positive, monotone Funktion erster Art vorstellen soll.

Satz 1.[1]) Jede Reihe von der Form

$$\sum_0^\infty{}_n (\mu_{n+1} - \mu_n) \tag{7}$$

und ebenso jede von der Form

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n} \tag{8}$$

ist divergent, und zwar divergiert bei derselben Wahl der

1) Die Sätze 1 und 2 nach Pringsheim a. a. O. — Pringsheim nennt die Darstellungen (7) bis (10) typische Formen divergenter bezw. konvergenter Reihen.

Funktion μ_n die erstere stärker als die letztere. — Umgekehrt läßt sich jede divergente Reihe mit positiven Gliedern Σa_n sowohl in der Form (7) als auch in der Form (8) darstellen, und zwar ist hierdurch die Funktion μ_n bis auf eine additive, bezw. multiplikative Konstante μ bestimmt.

Beweis. Daß die Reihe (7) divergiert, ist unmittelbar klar (vgl. „Arithmetik" S. 229). Bezüglich der Reihe (8) hat man zunächst wegen $\mu_{n+1} > \mu_n$

$$\sum_1^p{}_r \frac{\mu_{n+r+1} - \mu_{n+r}}{\mu_{n+r}} > \frac{1}{\mu_{n+p}} \sum_1^p{}_r (\mu_{n+r+1} - \mu_{n+r}) = \frac{\mu_{n+p+1} - \mu_{n+1}}{\mu_{n+p}},$$

also

$$\sum_1^p{}_r \frac{\mu_{n+r+1} - \mu_{n+r}}{\mu_{n+r}} > 1 - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_{n+p}}.$$

Denkt man sich nun für n irgend einen festen Wert gewählt und bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so kann man wegen $\lim \mu_n = +\infty$ immer noch p so groß nehmen, daß die rechte Seite der letzten Ungleichung größer als $1 - \varepsilon$ ausfällt. Es ist demnach die zur Konvergenz notwendige Bedingung (1) in Nr. 1 nicht erfüllt und folglich die Reihe (8) divergent. Ferner hat man

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ (\mu_{n+1} - \mu_n) : \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n} \right\} = \lim_{n=+\infty} \mu_n = +\infty,$$

so daß nach dem ersten Satze in Nr. 2 die Reihe (7) stärker divergiert als die Reihe (8).

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, bezeichnen wir die Teilsummen von Σa_n wieder mit s_n und setzen zunächst

$$a_n = \mu_{n+1} - \mu_n.$$

Ersetzt man hier n nacheinander durch $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ und addiert die so entstehenden Gleichungen, so erhält man

$$s_{n-1} = \mu_n - \mu_0, \quad \text{d. i.} \quad \mu_n = \mu_0 + s_{n-1};$$

die Funktion μ_n ist also bis auf die additive Konstante μ_0 bestimmt. Zugleich ersieht man daraus, daß $\mu_{n+1} > \mu_n$ und zufolge der Divergenz von Σa_n auch

$$\lim_{n=+\infty} \mu_n = \lim_{n=+\infty} s_{n-1} = +\infty$$

wird. — Setzt man dagegen

$$a_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1 + a_n,$$

so findet man, indem man an Stelle von n nacheinander $0, 1, 2, \ldots (n-1)$

schreibt und die so erhaltenen Gleichungen miteinander multipliziert, nach Entfernung des Nenners μ_0

$$\mu_n = \mu_0 \prod_0^{n-1}{}_r (1 + a_r),$$

so daß μ_n bis auf den Faktor μ_0 bestimmt ist. Dabei ist $\mu_{n+1} > \mu_n$ und wegen der Divergenz von Σa_n nach „Arithmetik“ IX, 12

$$\lim_{n=+\infty} \mu_n = +\infty;$$

μ_0 muß jedoch positiv gewählt werden.

Man kann immer in (7) $\mu_0 = 0$ und in (8) $\mu_0 = 1$ nehmen, falls die μ_n nicht zum voraus bestimmt sind. Soll aber das μ_n in (7) die nämliche Funktion wie in (8) sein, so muß man μ_0 positiv annehmen, weil für $\mu_0 = 0$ das Anfangsglied in (8) keinen Sinn hätte.

Da in der Form (7) auch unter der Voraussetzung, daß $\mu_0 > 0$ sein solle, jede divergente Reihe mit positiven Gliedern enthalten ist und bei der nämlichen Wahl der Funktion μ_n die Reihe (8) schwächer divergiert als (7), so können wir jetzt sagen:

Folgerung 1. „Zu jeder divergenten Reihe Σa_n gibt es eine und daher auch unbegrenzt viele schwächer divergente Reihen Σd_n und zwar so, daß $\lim (a_n : d_n) = +\infty$ ist.“

Satz 2. Jede Reihe von der Form

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n \mu_{n+1}}, \tag{9}$$

aber auch jede von der Form

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1} \mu_n^\varrho}, \tag{10}$$

worin ϱ eine beliebige positive Zahl sein kann, konvergiert und zwar die letztere um so stärker, je größer ϱ ist. — Umgekehrt läßt sich jede konvergente Reihe Σa_n mit positiven Gliedern stets und zwar nur auf eine einzige Weise in der Form (9) darstellen.

Beweis. Die Reihe (9) kann man in der Gestalt

$$\sum_0^\infty{}_n \left(\frac{1}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_{n+1}} \right) \tag{11}$$

anschreiben, woraus ihre Konvergenz nach „Arithmetik“ S. 229 unmittelbar erhellt. Ihr Grenzwert ist $1 : \mu_0$. — Um die Konvergenz der Reihe (10) zunächst für den Fall $\varrho > 1$ nachzuweisen, beachte man, daß wegen $\lim \mu_n = +\infty$ mindestens von einer bestimmten Stelle $n = m$ angefangen $\mu_n > 1$ sein muß. Deshalb ist in diesem Falle jedes Glied von (10), in welchem $n \geqq m$ ist, kleiner als das

entsprechende Glied von (9), so daß neben der Reihe (9) sicher auch die Reihe (10) konvergiert. Für den Fall, daß $\varrho < 1$ ist, setzen wir

$$b_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}\mu_n^{\varrho}}, \quad c_n = \frac{\mu_{n+1}^{\varrho} - \mu_n^{\varrho}}{\mu_{n+1}^{\varrho}\mu_n^{\varrho}}, \quad q_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$$

nnd wir haben dann

$$c_n = \frac{\mu_{n+1}^{\varrho} - \mu_n^{\varrho}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \cdot \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}^{\varrho}\mu_n^{\varrho}} = \frac{1 - q_n^{\varrho}}{1 - q_n} b_n. \tag{12}$$

Nach „Arithmetik“ VIII, 9 oder 10 ist nun wegen $0 < q_n < 1$ und $0 < \varrho < 1$

$$q_n^{\varrho} = \{1 + (q_n - 1)\}^{\varrho} < 1 + \varrho(q_n - 1),$$

also

$$1 - q_n^{\varrho} > \varrho(1 - q_n) \quad \text{und} \quad \frac{1 - q_n^{\varrho}}{1 - q_n} > \varrho,$$

so daß sich aus (12)

$$b_n < \frac{1}{\varrho} c_n$$

ergibt. Da nun die Reihe mit dem allgemeinen Gliede c_n aus demselben Grunde, wie die Reihe (9), konvergiert, so konvergiert auch Σb_n, d. i. die Reihe (10). Die letztere Reihe konvergiert somit für jeden positiven Wert von ϱ; denn für $\varrho = 1$ fällt sie mit der Reihe (9) zusammen. Denkt man sich noch $\varrho' > \varrho$ und setzt

$$b_n' = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}\mu_n^{\varrho'}},$$

so hat man

$$\lim_{n=+\infty} (b_n' : b_n) = \lim_{n=+\infty} \mu_n^{-(\varrho' - \varrho)} = 0.$$

Nach dem zweiten Satze in Nr. 2 konvergiert demnach $\Sigma b_n'$ stärker als Σb_n, d. h. die Reihe (10) konvergiert um so stärker, je größer ϱ ist.

Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes übergehend, setzen wir, da die Reihe (9) mit (11) identisch ist,

$$a_n = \frac{1}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_{n+1}}$$

und es ist dann

$$s_{n-1} = \sum_0^{n-1} a_r = \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_n}, \quad \text{d. i.} \quad \mu_n = 1 : \left(\frac{1}{\mu_0} - s_{n-1}\right). \tag{13}$$

Bezeichnen wir mit a den Grenzwert von Σa_n, so muß, damit μ_n eine monotone Funktion erster Art werde, $\mu_0 = 1 : a$ genommen werden; dann aber ist wirklich nach (13)

$$\mu_{n-1} > \mu_n \quad \text{und} \quad \lim_{n=+\infty} \mu_n = +\infty.$$

Folgerung 2. „Zu jeder konvergenten Reihe Σa_n gibt es eine und daher auch unbegrenzt viele schwächer konvergente Reihen Σc_n und zwar so, daß $\lim (a_n : c_n) = 0$ ist."

Nimmt man nämlich in (10) $\varrho < 1$, so konvergiert diese Reihe schwächer als die Reihe (9), welche jede konvergente Reihe mit positiven Gliedern vorstellen kann.

Aus den beiden Folgerungen 1 und 2 ergibt sich im Hinblicke auf den Satz in Nr. 1 noch die von Kummer bewiesene Tatsache, daß es für jede Reihe mit positiven Gliedern ein wirksames Konvergenz- oder Divergenzkriterium geben müsse.

4. Logarithmische Relationen.

Da uns in den folgenden Nummern häufig logarithmische Ausdrücke begegnen werden, so empfiehlt es sich, die Betrachtung der hierbei zur Geltung kommenden allgemeinen Beziehungen zwischen denselben hier vorauszuschicken.

Zu diesem Zwecke gebrauchen wir den Begriff der monotonen Funktion erster Art in etwas weiterem Sinne, als es bisher geschehen ist, indem wir auch eine monotone Funktion $f(x)$ der stetigen Veränderlichen x als solche erster Art bezeichnen, wenn

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty$$

ist. Es bestehen dann offenbar die beiden Sätze:

a) „Das Produkt zweier oder mehrerer monotoner Funktionen erster Art von x ist mindestens von einer Stelle $x = x_0$ an, bei welcher die sämtlichen Faktoren positiv sind, für alle $x \geqq x_0$ eine ebensolche Funktion von x."

b) „Jede monotone Funktion erster Art $f(\varphi(x))$ von einer ebensolchen Funktion $\varphi(x)$ von x ist ebenfalls eine monotone Funktion erster Art von x."

Setzt man nun

$$\log x = \log_1 x,\ \log(\log x) = \log_2 x,\ \log(\log_2 x) = \log_3 x,$$

allgemein

$$\log(\log_{r-1} x) = \log_r x \qquad (r \geqq 1),$$

wobei noch $\log_0 x = x$ zu denken ist, so ist nach dem Satze b) jede dieser Funktionen eine monotone Funktion erster Art von x. Selbstverständlich hat man dabei in $\log x$ $x > 0$, in $\log_2 x$ $x > 1$, in $\log_3 x$ $x > B$, in $\log_4 x$ $x > B^B$ usw. zu nehmen, wo B die Basis des Logarithmensystems bedeutet, welche selbst größer als 1 sein muß.

Von derselben Art ist nach dem Satze a) auch das Produkt

$$L_r(x) = x \log x \log_2 x \cdots \log_r x \qquad (r \geqq 0).$$

Bezüglich der Funktionen $\log_r x$ und $L_r(x)$ gelten nun die nachstehenden Formeln. Zunächst ergibt sich aus der Gleichung (d) S. 26 direkt

$$\lim_{y=+\infty} \frac{\log y}{y^\lambda} = 0 \qquad (\lambda > 0) \tag{1}$$

und wenn man hier $y = \log_r x$ setzt,

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\log_{r+1} x}{(\log_r x)^\lambda} = 0 \qquad (r \geqq 0,\ \lambda > 0). \tag{2}$$

Da ferner für $r > 1$

$$\frac{\log_r x}{x^\lambda} = \frac{\log_r x}{\log_{r-1} x} \cdot \frac{\log_{r-1} x}{\log_{r-2} x} \cdots \frac{\log_2 x}{\log x} \cdot \frac{\log x}{x^\lambda}$$

ist, so hat man zufolge (1) und (2)

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\log_r x}{x^\lambda} = 0 \qquad (r \geqq 1,\ \lambda > 0), \tag{3}$$

wofür man wegen

$$\frac{(\log_r x)^\varkappa}{x^\lambda} = \left(\frac{\log_r x}{x^{\lambda:\varkappa}}\right)^\varkappa$$

auch allgemeiner

$$\lim_{x=+\infty} \frac{(\log_r x)^\varkappa}{x^\lambda} = 0 \qquad (r \geqq 1,\ \varkappa > 0,\ \lambda > 0) \tag{4}$$

schreiben kann. Weil

$$\frac{L_r(x)}{x^{1+\lambda}} = \frac{\log x}{x^{\lambda:r}} \cdot \frac{\log_2 x}{x^{\lambda:r}} \cdots \frac{\log_r x}{x^{\lambda:r}}$$

ist, so folgt aus (3) noch

$$\lim_{x=+\infty} \frac{L_r(x)}{x^{1+\lambda}} = 0 \qquad (r \geqq 1,\ \lambda > 0). \tag{5}$$

Diese Formel gilt übrigens offenbar auch für $r = 0$, wenn man $L_0(x) = x$ sein läßt. Man kann noch bemerken, daß die Formeln (1) bis (5) bestehen bleiben, wenn man darin y bezw. x durch irgend eine monotone Funktion μ_n ersetzt und dann den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ vollzieht.

Eine zweite Gruppe von logarithmischen Formeln gewinnt man aus den in „Arithmetik" S. 218 aufgestellten Beziehungen

$$e^x > 1 + x \ (x \gtrless 0) \text{ und } e^x < \frac{1}{1-x} \ (x \gtrless 0;\ x < 1). \tag{α}$$

Setzt man in der ersten derselben $1 + x = y$, so hat man

$$e^{y-1} > y \quad (y \gtrless 1), \tag{β}$$

und die zweite Formel (α) geht durch die Substitution $1 : (1 - x) = y$ über in

$$e^{1-\frac{1}{y}} < y \quad (y > 0;\ y \gtrless 1). \tag{γ}$$

Aus (β) und (γ) ergibt sich aber

$$M\left(1-\frac{1}{y}\right) < \log y < M(y-1) \quad (y>0;\ y \gtrless 1), \tag{6}$$

worin M den Modul des Logarithmensystems mit der Basis B bedeutet. Schreibt man hier $y = \mu_{n+1} : \mu_n$, so erhält man

$$M \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_{n+1}} < \log \mu_{n+1} - \log \mu_n < M \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_n}.^{1}) \tag{7}$$

Allgemeiner führt die Substitution $y = \log_{r-1} \mu_{n+1} : \log_{r-1} \mu_n$ in (6) zu der Beziehung

$$M \cdot \frac{\log_{r-1}\mu_{n+1} - \log_{r-1}\mu_n}{\log_{r-1}\mu_{n+1}} < \log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n < M \cdot \frac{\log_{r-1}\mu_{n+1} - \log_{r-1}\mu_n}{\log_{r-1}\mu_n}.$$

Ersetzt man hier r nacheinander durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots r$, multipliziert hierauf in den so entstandenen Ungleichungen die gleichstelligen Ausdrücke miteinander und dividiert durch das Produkt $(\log \mu_{n+1} - \log \mu_n) \ldots (\log_{r-1} \mu_{n+1} - \log_{r-1} \mu_n)$, so ergibt sich

$$M^r \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{L_{r-1}(\mu_{n+1})} < \log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n < M^r \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{L_{r-1}(\mu_n)} \quad (r = 1, 2, 3, \cdots). \tag{8}$$

Von besonderem Interesse sind für uns jene monotonen Funktionen erster Art μ_n, für welche der Quotient $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert oder zwei endliche Unbestimmtheitsgrenzen besitzt. Ein solches Verhalten von μ_n kann man kurz ausdrücken, indem man sagt, $\mu_{n+1} : \mu_n$ bleibe bei $\lim n = +\infty$ endlich. Dann gilt der Satz:

Satz c). „Wenn der Quotient $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei $\lim n = +\infty$ endlich bleibt, so ist

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\log_r \mu_{n+1}}{\log_r \mu_n} = 1 \quad (r = 1, 2, 3, \cdots) \tag{9}$$

und der Quotient $L_r(\mu_{n+1}) : L_r(\mu_n)$ bleibt beim nämlichen Grenzübergange ebenfalls endlich. Insbesondere ist neben

$$\lim_{n=+\infty} (\mu_{n+1} : \mu_n) = 1 \text{ auch } \lim_{n=+\infty} \frac{L_r(\mu_{n+1})}{L_r(\mu_n)} = 1 \quad (r>0).\text{“} \tag{10}$$

Beweis: Aus der Identität

$$\frac{\log \mu_{n+1}}{\log \mu_n} = 1 + \frac{1}{\log \mu_n} \log \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$$

---

1) Vgl. Pringsheim a. a. O. S. 317.

ergibt sich auf Grund unserer Voraussetzung sofort

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\log \mu_{n+1}}{\log \mu_n} = 1.$$

Es ist demnach $\mu'_n = \log \mu_n$ eine monotone Funktion erster Art, für welche $\lim (\mu'_{n+1} : \mu'_n) = 1$ ist, und dasselbe gilt jetzt offenbar auch von den Funktionen $\log_2 \mu_n$, $\log_3 \mu_n, \ldots \log_r \mu_n$, wodurch die Formel (9) sicher gestellt ist. Der noch übrige Teil des Satzes folgt mit Rücksicht auf die Bedeutung von $L_r(\mu_n)$ unmittelbar aus (9).

Zufolge dieses Satzes ergibt sich aus der Formel (8) unmittelbar:

Satz d). „Wenn $\lim (\mu_{n+1} : \mu_n) = 1$ ist, so bestehen die Beziehungen

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ L_{r-1}(\mu_n) \frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{\mu_{n+1} - \mu_n} \right\} = M^r \tag{11}$$

und

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ L_{r-1}(\mu_{n+1}) \frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{\mu_{n+1} - \mu_n} \right\} = M^r \tag{12}$$

und zwar für jeden Wert $r = 1, 2, 3, \ldots$ — Falls $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei $\lim n = +\infty$ bloß endlich bleibt, hat der Ausdruck

$$L_{r-1}(\mu_n) \frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{\mu_{n+1} - \mu_n}$$

beim nämlichen Grenzübergange zwei endliche positive Unbestimmtheitsgrenzen."

Läßt man $\mu_n = n$ sein, so kann man der Formel (12) die Gestalt geben

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ L_r(n+1) \left(1 - \frac{\log_r n}{\log_r (n+1)}\right)\right\} = M^r. \tag{13}$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung von (10) auch

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ L_r(n) \left(1 - \frac{\log_r n}{\log_r (n+1)}\right)\right\} = M^r \tag{14}$$

und diese Gleichung kann man in der Form

$$\frac{\log_r n}{\log_r (n+1)} = 1 - \frac{M^r}{L_r(n)} v_r(n) \quad \left[\lim_{n=+\infty} v_r(n) = 1\right] \tag{15}$$

anschreiben. Denkt man sich die letzte Gleichung für $r = 1, 2, 3, \cdots s$ gebildet und hierauf die so erhaltenen Gleichungen miteinander und mit der Gleichung

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{w(n)}{n^2} \quad \left[\lim_{n=+\infty} w(n) = 1\right],$$

welche aus der Identität

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

folgt, multipliziert, so findet man

$$\frac{L_s(n)}{L_s(n+1)} = 1 - Q_s(n) + \frac{w_s(n)}{n^2}, \tag{16}$$

worin

$$Q_s(n) = \frac{1}{n} + \frac{M}{L_1(n)}\, v_1(n) + \frac{M^2}{L_2(n)}\, v_2(n) + \cdots + \frac{M^s}{L_s(n)}\, v_s(n)$$

gesetzt erscheint und $w_s(n)$ ebenso wie $v_1(n)$, $v_2(n)$, ... $v_s(n)$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert 1 hat. Die Formel (16) gilt auch für $s = 0$, wenn man $Q_0(n) = 1 : n$ setzt.

5. Divergenzkriterien erster Art.

Die allgemeine Form der Kriterien erster Art ist durch die Ungleichungen (4) in Nr. 1 gegeben. Von diesen fassen wir zunächst die zweite, welche sich auf die Divergenz bezieht, ins Auge. Ersetzt man die in dem Satze von Nr. 1 auftretende divergente Vergleichsreihe Σd_n durch eine andere $\Sigma d_n'$ von der Beschaffenheit, daß der Quotient $d_n : d_n'$ für alle dem n zukommenden Werte zwischen den nämlichen zwei positiven Zahlen α und β, von denen β die größere sein soll, liegt, so daß also

$$0 < \alpha < \frac{d_n}{d_n'} < \beta \tag{1}$$

ist, so besteht die Beziehung

$$\alpha \frac{a_{n+k}}{d_n} < \frac{a_{n+k}}{d_n'} < \beta \frac{a_{n+k}}{d_n}.$$

Demnach ist neben $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n} > 0$ auch $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n'} > 0$ und neben $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n} = 0$ auch $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n'} = 0$. Daraus ersieht man, daß die beiden Vergleichsreihen Σd_n und $\Sigma d_n'$ unter der Voraussetzung (1) äquivalente, d. h. solche Kriterien liefern, von denen das eine genau dasselbe leistet wie das andere.

Wenn man dagegen die Vergleichsreihe Σd_n durch eine im Sinne des Satzes 1 in Nr. 2 schwächer divergierende Reihe $\Sigma d_n'$ ersetzt, so daß

$$\lim_{n=+\infty} (d_n : d_n') = +\infty \tag{2}$$

ist, so hat man wegen

$$\frac{a_{n+k}}{d_n'} = \frac{a_{n+k}}{d_n} \cdot \frac{d_n}{d_n'}$$

neben $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n} > 0$ sicher auch $\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n'} > 0$; falls aber

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n} = 0$$

ist, so kann zufolge (2) immerhin noch

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+k}}{d_n'} > 0$$

werden. Um diesen letzten Fall herbeizuführen, braucht man ja nur $k = 0$ und $a_n = d_n'$ zu nehmen. Demnach ist das Divergenzkriterium mit der Vergleichsreihe $\Sigma d_n'$ schärfer als jenes mit der Vergleichsreihe Σd_n.

Hierdurch ist nun der Weg vorgezeichnet, auf welchem man von irgend einem Anfangskriterium ausgehend zu einer geordneten Folge von Divergenzkriterien erster Art gelangen kann. Es handelt sich dabei einzig darum, zu einer divergenten Reihe Σd_n eine schwächer divergente $\Sigma d_n'$ zu finden, so daß die Beziehung (2) besteht. Hierzu benützen wir die in Nr. 3 gegebene Darstellung der Reihen mittels monotoner Funktionen erster Art. Von den beiden dort aufgestellten Formen divergenter Reihen (7) und (8) ist die eine wie die andere verwendbar; doch verdient die letztere insofern den Vorzug, weil sie bei derselben Wahl des μ_n eine schwächer divergente Reihe darstellt als die erstere.

Setzen wir demgemäß

$$d_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n} \text{ und } d_n' = \frac{\log \mu_{n+1} - \log \mu_n}{\log \mu_n},$$

so ist zufolge der Formel (7) in Nr. 4

$$\frac{d_n}{d_n'} = \frac{\log \mu_n}{\mu_n} \cdot \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\log \mu_{n+1} - \log \mu_n} > \frac{\log \mu_n}{M},$$

also

$$\lim_{n=+\infty} (d_n : d_n') = +\infty.$$

Demnach liefert die Reihe $\Sigma d_n'$ ein schärferes Kriterium als Σd_n. Eine geordnete Folge von Divergenzkriterien erhält man somit, indem man als Vergleichsreihen nacheinander jene Reihen verwendet, welche sich ergeben, wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke für d_n an Stelle von μ_n nacheinander

$$\mu_n,\ \log \mu_n,\ \log_2 \mu_n, \ldots \log_r \mu_n, \ldots$$

setzt. Zufolge des Satzes in Nr. 1 lauten diese Kriterien:

„Die Reihe Σa_n divergiert, wenn

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+k} \log_r \mu_n}{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n} > 0 \qquad (3)$$

ist. Die geordnete Folge entspricht den steigenden Werten $r = 0, 1, 2, \ldots$"

Diese, sowie alle hier noch zu erörternden allgemeinen Kriterienfolgen, welche die Funktion μ_n enthalten, sind von Pringsheim (a. a. O.) aufgestellt worden.

Falls man die Funktion μ_n so wählt, daß $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei $\lim n = +\infty$ endlich bleibt, kann man die Kriterien (3) noch vereinfachen.[1]) Setzt man nämlich

$$d_n = \frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{\log_r \mu} \text{ und } d'_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{L_r(\mu_n)},$$

so hat jetzt der Quotient $d_n : d'_n$ gemäß des zweiten Teiles des Satzes (d) in Nr. 4 bei $\lim n = +\infty$ zwei endliche positive Unbestimmtheitsgrenzen, so daß die Vergleichsreihen Σd_n und $\Sigma d'_n$ äquivalente Kriterien ergeben. Die Kriterien (3) sind somit unter der jetzigen Annahme äquivalent mit den folgenden:

„Die Reihe Σa_n divergiert, wenn

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+k} L_r(\mu_n)}{\mu_{n+1} - \mu_n} > 0 \tag{4}$$

ist für einen der Werte $r = 0, 1, 2, \ldots$"

Hieraus ergeben sich, indem man $\mu_n = n$ nimmt, die gewöhnlichen logarithmischen Divergenzkriterien erster Art:

„Die Reihe Σa_n divergiert, wenn für einen Wert $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\underline{\lim} \{ a_{n+k} L_r(n) \} > 0 \tag{5}$$

ist, d. h. wenn bei unbegrenzt wachsendem n einer der Ausdrücke

$$n a_{n+k},\ n \log n\, a_{n+k},\ L_2(n)\, a_{n+k}, \cdots L_r(n)\, a_{n+k}, \cdots \tag{6}$$

entweder einen positiven Grenzwert hat oder doch schließlich über einer positiven Zahl C bleibt."[2])

Zu dem nämlichen Endresultate gelangt man auch, wenn man statt der Reihenform (8) die Form (7) in Nr. 3 benützt, nur beginnt dann die Kriterienfolge (6) nicht mit $n a_{n+k}$, sondern mit a_{n+k}.

Beispiele. 1) Die unendliche Reihe $\sum \frac{1}{L_r(n)}$ divergiert bei jedem Werte $r = 0, 1, 2, \ldots$, wie aus (6) unmittelbar folgt.

---

1) Wenn $\overline{\lim} (\mu_{n+1} : \mu_n) = +\infty$ ist, so enthält die Reihe Σd_n mit dem allgemeinen Gliede

$$d_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n}$$

solche Glieder, welche jede endliche Zahl übersteigen; denn es ist dann auch

$$\overline{\lim}\, d_n = \overline{\lim} \left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} - 1 \right) = +\infty.$$

Man verliert daher durch die in Rede stehende Beschränkung von μ_n keine belangreichen Kriterien.

2) Die Folge der Divergenzkriterien (6) sowie jene der ihnen entsprechenden Konvergenzkriterien (10) in Nr. 6 ist in der hier gegebenen Gestalt zuerst von O. Bonnet, Journ. de Math. 8 (1843), S. 78, aufgestellt worden.

2) Ebenso divergiert jede der unendlichen Reihen

$$\sum \frac{1}{(\log_r n)^\lambda} \quad (r = 1, 2, 3, \cdots)$$

bei jedem (endlichen) Werte von λ. Wenn $\lambda < 0$ ist, wachsen die Glieder der Reihe mit n zugleich ins Unendliche.

3) Es divergiert jede der unendlichen Reihen

$$\sum \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{L_r(\mu_n)} \quad (r = 0, 1. 2, \cdots).$$

6. Konvergenzkriterien erster Art.

Die Grundform der Konvergenzkriterien erster Art besteht, wie bereits bemerkt wurde, in der ersten Ungleichung (4) von Nr. 1. Durch eine ganz analoge Überlegung, wie wir sie zu Beginn der vorigen Nr. 5 bezüglich der Divergenzkriterien gemacht haben, gelangt man auch hier zu der Überzeugung, daß die zwei konvergenten Vergleichsreihen Σc_n und $\Sigma c'_n$ entsprechenden Kriterien einander äquivalent sein werden, wenn der Quotient $c_n : c'_n$ für alle dem n zukommenden Werte zwischen den nämlichen zwei positiven Zahlen α und β liegt. Dagegen wird die Reihe $\Sigma c'_n$ ein schärferes Konvergenzkriterium liefern als die Reihe Σc_n, wenn die erstere im Sinne des Satzes 2 von Nr. 2 schwächer konvergiert als die letztere, d. h. wenn

$$\lim_{n=+\infty} (c_n : c'_n) = 0 \tag{1}$$

ist.

Gemäß des Satzes 2 von Nr. 3 können wir uns das allgemeine Glied der konvergenten Vergleichsreihe Σc_n zunächst in der Form

$$c_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}\mu_n^\varrho} \quad (\varrho > 0) \tag{2}$$

gegeben denken, und hierbei darf, wie Pringsheim bemerkt hat, ohne daß dadurch Kriterien von Belang verloren gingen, die Funktion μ_n zum vorhinein so beschränkt werden, daß $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei unbegrenzt wachsendem n endlich bleibt (vergl. Übung 3)).

Lassen wir nun diese Beschränkung von μ_n in Kraft treten, und setzen wir

$$c'_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n^{1+\varrho}}, \tag{3}$$

so ist zufolge (2)

$$c'_n : c_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n^{1+\varrho}} : \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}\mu_n^\varrho} = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}.$$

Es hat also $c'_n : c_n$ zwei endliche positive Unbestimmtheitsgrenzen bei $\lim n = +\infty$, so daß nach dem Satze in Nr. 1 neben Σc_n auch $\Sigma c'_n$ konvergiert und gemäß der obigen Erörterung die

beiden aus den Vergleichsreihen Σc_n und $\Sigma c'_n$ hervorgehenden Konvergenzkriterien einander äquivalent sind. Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede (3) liefert aber das Kriterium:

„Die Reihe Σa_n konvergiert, wenn

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+k}\,\mu_n^{1+\varrho}}{\mu_{n+1}-\mu_n} \tag{4}$$

endlich ist."

Setzen wir jetzt

$$c_n = \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\mu_n^{1+\varrho}} \text{ und } c'_n = \frac{\log \mu_{n+1} - \log \mu_n}{(\log \mu_n)^{1+\varrho}}, \tag{5}$$

so sind die diesen Ausdrücken entsprechenden Reihen Σc_n und $\Sigma c'_n$ konvergent und man hat

$$\frac{c_n}{c'_n} = \left(\frac{\log \mu_n}{\mu_n}\right)^{1+\varrho} \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{\log \mu_{n+1} - \log \mu_n};$$

somit ist nach der Formel (7) in Nr. 4

$$\frac{c_n}{c'_n} < \frac{\mu_{n+1}}{M}\left(\frac{\log \mu_n}{\mu_n}\right)^{1+\varrho} = \frac{1}{M} \cdot \frac{(\log \mu_n)^{1+\varrho}}{\mu_n{}^{\varrho}} \cdot \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}. \tag{6}$$

Von den drei Faktoren auf der rechten Seite dieser Relation ist der erste eine Konstante, der zweite hat gemäß der Formel (4) in Nr. 4 bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null und der dritte bleibt beim nämlichen Grenzübergange zufolge unserer Voraussetzung endlich. Es folgt daher aus (6)

$$\lim_{n=+\infty} (c_n : c'_n) = 0.$$

Demnach liefert von den beiden Reihen Σc_n und $\Sigma c'_n$, deren allgemeinen Glieder durch die Ausdrücke (5) definiert sind, die zweite ein schärferes Kriterium als die erste, und man kann daher auf das Kriterium (4) eine geordnete Folge von Konvergenzkriterien dadurch aufbauen, daß man dort an Stelle von μ_n nacheinander

$$\mu_n,\ \log \mu_n,\ \log_2 \mu_n, \cdots \log_r \mu_n, \cdots$$

setzt. Die so erhaltene Kriterienfolge lautet:

„Die Reihe Σa_n konvergiert, wenn für einen der Werte $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+k}(\log_r \mu_n)^{1+\varrho}}{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n} \tag{7}$$

endlich ist."

Diese Kriterien gestatten aber eine ähnliche Vereinfachung, wie die entsprechenden Divergenzkriterien (3) der vorigen Nummer. Es ist nämlich für $r \geqq 1$

$$\frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{(\log_r \mu_n)^{1+\varrho}} = \frac{L_{r-1}(\mu_n)\,\{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n\}}{\mu_{n+1}-\mu_n} \cdot \frac{\mu_{n+1}-\mu_n}{L_{r-1}(\mu_n)\,(\log_r \mu_n)^{1+\varrho}},$$

worin der erste Faktor rechts nach dem zweiten Teile des Satzes d) in Nr. 4 bei $\lim n = +\infty$ zwei endliche positive Unbestimmtheitsgrenzen besitzt. Demgemäß sind die Kriterien (7) äquivalent mit den folgenden:

„Die Reihe Σa_n konvergiert, wenn für einen der Werte $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim} \frac{a_{n+k} L_{r-1}(\mu_n) (\log_r \mu_n)^{1+\varrho}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \tag{8}$$

endlich ist, wobei man sich noch $L_{-1}(\mu_n) \equiv 1$ zu denken hat."

Für $\mu_n = n$ erhält man aus (8) wieder die gewöhnlichen logarithmischen Konvergenzkriterien erster Art:

„Die Reihe Σa_n konvergiert, wenn für einen der Werte $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim} \{a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\varrho}\} \quad [L_{-1}(n) \equiv 1] \tag{9}$$

endlich ist, d. h. wenn bei unbegrenzt wachsendem n einer der Ausdrücke

$$n^{1+\varrho} a_{n+k},\ n (\log n)^{1+\varrho} a_{n+k}, \cdots L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\varrho} a_{n+k}, \cdots \tag{10}$$

entweder einen endlichen Grenzwert hat, oder doch schließlich unter einer endlichen positiven Zahl C bleibt."[1])

In den vorstehenden Konvergenzkriterien darf man für ϱ jede positive Zahl wählen.

Beispiele. 1) Die unendliche Reihe $\Sigma \frac{1}{n^\lambda}$ konvergiert, wenn $\lambda > 1$; sie divergiert dagegen, wenn $\lambda \leqq 1$ ist. — Falls $\lambda > 1$ ist, setze man $\varrho = \lambda - 1$, und man hat dann $n^{1+\varrho} a_n = n^\lambda a_n = 1$. Die Divergenz im Falle $\lambda \leqq 1$ ergibt sich aus dem ersten Kriterium (6) der vorigen Nummer.

2) Die unendliche Reihe $\Sigma \frac{1}{L_{r-1}(n) (\log_r n)^\lambda}$, worin $r \geqq 1$ ist, konvergiert wenn $\lambda > 1$; sie divergiert, wenn $\lambda \leqq 1$ ist. — Die Konvergenz im ersten Falle folgt aus dem obigen Kriterium (9), die Divergenz im zweiten Falle aus dem Kriterium (5) der vorigen Nummer.

7. Kriterien zweiter Art.

Satz. Ist Σc_n eine konvergente, Σd_n eine divergente und Σa_n eine beliebige Reihe mit positiven Gliedern, so kon-

1) Die gewöhnlichen logarithmischen Divergenzkriterien (6) in Nr. 5 und Konvergenzkriterien (10) in dieser Nr. 6 reichen nicht aus, um die Divergenz bezw. Konvergenz einer jeden Reihe mit positiven Gliedern zu erkennen. P. du Bois-Reymond hat zuerst eine konvergente Reihe nachgewiesen, für welche die sämtlichen Kriterien (10) versagen (a. a. O. S. 90). Weitere Beispiele dieser Art, und zwar sowohl von konvergenten als auch von divergenten Reihen, gibt Pringsheim a. a. O. S. 355 u. d. f.

vergiert Σa_n, wenn von einer bestimmten Stelle m des Zeigers n an

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad (n \geqq m); \tag{1}$$

dagegen divergiert diese Reihe, wenn

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \geqq \frac{d_{n+1}}{d_n} \qquad (n \geqq m) \tag{2}$$

satz.[1])

Diesen Satz, welcher die Grundlage für die Kriterien zweiter Art bildet, haben wir schon in „Arithmetik" S. 236 kennen gelernt. Es ist indessen von Wichtigkeit, hier darauf hinzuweisen, daß derselbe eine einfache Folge aus dem Satze von Nr. 1, d i. aus dem Prinzipe der Reihenvergleichung darstellt. Läßt man nämlich in der Relation (1) bezw. (2) den Zeiger n nacheinander die Werte m, $m+1$, $m+2$, ... $n-2$, $n-1$ annehmen und multipliziert hierauf die so entstehenden Relationen miteinander, so erhält man

$$\frac{a_{n+k}}{a_{m+k}} < \frac{c_n}{c_m} \text{ bezw. } \frac{a_{n+k}}{a_{m+k}} \geqq \frac{d_n}{d_m}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{a_{n+k}}{c_n} < \frac{a_{m+k}}{c_m} \text{ bezw. } \frac{a_{n+k}}{d_n} \geqq \frac{a_{m+k}}{d_m}.$$

Man ersieht daraus, daß neben den Relationen (1) bezw. (2) stets auch die Ungleichungen (2) bezw. (3) in Nr. 1 erfüllt sind. Jedoch gilt, wie man sich leicht überzeugen wird, nicht auch die Umkehrung hiervon. Der vorstehende Satz deckt sich also zwar nicht mit dem Satze in Nr. 1, wohl aber ist derselbe ein spezieller Fall des letzteren. Daraus geht unmittelbar hervor, daß die in den Relationen (1) und (2) bestehenden Kriterien zweiter Art schwächer sein werden als die denselben Vergleichsreihen Σc_n und Σd_n entsprechenden Kriterien erster Art.

Während in den Formeln (1) und (2) für den Fall der Konvergenz und jenen der Divergenz zwei verschiedene Vergleichsreihen Σc_n und Σd_n auftreten, läßt sich, wie wir sogleich zeigen werden, die **divergente** Vergleichsreihe Σd_n nicht nur zu einem Divergenzkriterium sondern auch zu Konvergenzkriterien verwenden. Hierdurch wird es möglich, das obige **Kriterienpaar** durch ein einziges **disjunktives Kriterium** zu ersetzen, in welchem ein und derselbe den Quotienten $a_{n+1} : a_n$ enthaltende Ausdruck je nach seinem Ver-

[1]) Dieser Satz bleibt, wie man unmittelbar erkennt, auch für den Fall bestehen, daß die Glieder der Reihe Σa_n von $n = m$ an sämtlich negativ sind. Das Nämliche gilt auch von den nachstehenden Kriterien zweiter Art.

halten bei $\lim n = +\infty$ sowohl Konvergenz als auch Divergenz anzeigen kann.[1])

Wir nehmen jetzt an, die Divergenzbedingung (2) sei nicht erfüllt, sondern es sei vielmehr für $n \geqq m$

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < \frac{d_{n+1}}{d_n}, \text{ also } \frac{a_{n+k}}{d_n} - \frac{a_{n+k+1}}{d_{n+1}} > 0.$$

Dann ist der Quotient $a_{n+k} : d_n$ eine monotone, bei wachsendem n stets abnehmende Funktion von n, die bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert $c \geqq 0$ besitzt. Somit konvergiert nach „Arithmetik" S. 229 die unendliche Reihe

$$\sum_m^\infty \left(\frac{a_{n+k}}{d_n} - \frac{a_{n+k+1}}{d_{n+1}} \right). \tag{3}$$

Hieraus erfahren wir allerdings noch nichts über die Konvergenz oder Divergenz der Reihe Σa_n. Setzen wir aber nunmehr

$$\frac{a_{n+k}}{d_n} - \frac{a_{n+k+1}}{d_{n+1}} = \alpha_n a_{n+k} \text{ oder } \frac{a_{n+k}}{d_n} - \frac{a_{n+k+1}}{d_{n+1}} = \beta_n a_{n+k+1},$$

worin α_n und β_n positive, im allgemeinen von n abhängige Zahlen bedeuten, so ist nach dem Satze von Nr. 1 neben der Reihe (3) auch die Reihe Σa_n konvergent, wenn nur α_n oder β_n schließlich über einer positiven Zahl α bzw. β bleibt. Die Reihe Σa_n konvergiert also, wenn für alle Werte $n \geqq m$

$$\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} > \alpha \text{ oder } \frac{1}{d_n} \cdot \frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}} - \frac{1}{d_{n+1}} > \beta \tag{4}$$

ist.

Da sich das Konvergenzkriterium (1) auch in jeder der beiden Formen

$$\frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \geqq 0 \text{ und } \frac{1}{c_n} \cdot \frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}} - \frac{1}{c_{n+1}} \geqq 0 \tag{5}$$

anschreiben läßt, so ergibt sich aus (1) und (4) der folgende Satz:

„Gibt es eine für jeden Wert $n \geqq m$ positive Funktion $\varphi(n)$ derart, daß

$$\underline{\lim} \left\{ \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varphi(n+1) \right\} > 0 \tag{6}$$

---

1) Auch die Kriterien erster Art lassen sich in disjunktiver Form darstellen; die disjunktive Form ist sogar die ursprüngliche. Die erste geordnete Folge von disjunktiven Kriterien erster Art hat A. de Morgan „The differential and integral Calculus", London 1839, S. 326, und eine formell davon verschiedene und einfachere bald darauf J. Bertrand, Journal de Math. 7 (1842), S. 38 aufgestellt. Beide Folgen sind mit den in Nr. 5 und 6 vorgeführten Bonnet'schen Kriterien äquivalent. Vgl. auch Dini a. a. O. S. 14 und Pringsheim, Math. Annalen 35, S. 340 [ebenso Encyklopädie I, S. 86].

oder

$$\underline{\lim}\left\{\varphi(n)\frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}}-\varphi(n+1)\right\}>0 \tag{7}$$

ist, so konvergiert die Reihe Σa_n."[1])

Denn falls die unendliche Reihe $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ konvergiert, sind die Bedingungen (6) und (7) mit jenen (5), und falls $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ divergiert, mit jenen (4) im Einklang.

Die Bedingung (7) stellt im wesentlichen das Kummersche allgemeine Konvergenzkriterium dar, nur hatte Kummer noch die Nebenbedingung $\lim \varphi(n)\, a_{n+k}=0$ beigefügt, welche aber, wie für den Fall, daß $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ divergiert, zuerst Dini bemerkt hat, überflüssig ist. Die Kriterienform (6) rührt von du Bois-Reymond her.

Stellt man dem Divergenzkriterium (2) die Konvergenzkriterien (4) zur Seite und beachtet, daß das erstere auch in der Gestalt

$$\frac{1}{d_n}-\frac{1}{d_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\leqq 0 \text{ oder } \frac{1}{d_n}\cdot\frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}}-\frac{1}{d_{n+1}}\leqq 0$$

angeschrieben werden kann, so erhält man, indem man noch $1:d_n=\varphi(n)$ setzt, den Satz:

„Ist $\varphi(n)$ eine für alle Werte $n\geqq m$ positive Funktion von n von der Beschaffenheit, daß die unendliche Reihe $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ divergiert, so konvergiert oder divergiert die Reihe Σa_n, je nachdem

$$\overline{\lim}\left\{\varphi(n)-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi(n+1)\right\}>0 \text{ oder } <0,^{2}) \tag{8}$$

oder auch je nachdem

$$\overline{\lim}\left\{\varphi(n)\cdot\frac{a_{n+k}}{a_{n+k+1}}-\varphi(n+1)\right\}>0 \text{ oder } <0^{3}) \tag{9}$$

ist. — Hierbei bedeutet $\overline{\lim}$ »obere und untere Unbestimmtheitsgrenze« des hinter diesem Zeichen stehenden Ausdruckes bei $\lim n=+\infty$. Ist von den beiden Bedingungen (8) bezw. (9) keine erfüllt, so versagt das betreffende Kriterium."

Wir haben also zwei disjunktive Kriterien zweiter Art (8) und (9) erlangt. Dieselben sind, falls $a_{n+k+1}:a_{n+k}$ bei $\lim n=+\infty$ einen endlichen positiven Grenzwert oder allgemeiner zwei endliche positive Unbestimmtheitsgrenzen besitzt, offenbar einander

1) Bezüglich der Herleitung des Satzes vgl. O. Stolz, Vorlesungen über allgem. Arith. I. S. 259.

2) Vgl. P. du Bois-Reymond a. a. O. S. 68.

3) Dini a. a. O. S. 23.

äquivalent. Im allgemeinen aber hängt es von der Wahl der Funktion $\varphi(n)$ ab, ob die beiden Kriterien (8) und (9) äquivalent seien oder nicht.[1])

Man kann nun jedes dieser beiden Kriterien zur Bildung von geordneten Folgen disjunktiver Kriterien benützen. Es genügt indessen, diese Folgen für das eine der beiden Kriterien (8) und (9) wirklich herzustellen, da sich die dem anderen Kriterium entsprechenden Folgen dann leicht durch Analogie bilden lassen. Wir wählen hierzu das Kriterium (8).

8. Geordnete Folgen von disjunktiven Kriterien zweiter Art.

Um aus dem vorstehenden Kriterium (8) eine geordnete Kriterienfolge herzuleiten, denken wir uns darin die Funktion $\varphi(n)$ durch eine andere $\varphi'(n)$ ersetzt und schreiben zur Abkürzung

$$\lambda_n = \varphi(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi(n+1),\quad \lambda'_n = \varphi'(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi'(n+1). \tag{10}$$

Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_n = \varphi'(n) - \frac{\varphi(n)-\lambda_n}{\varphi(n+1)}\varphi'(n+1) = \frac{\varphi'(n+1)}{\varphi(n+1)}\left\{\lambda_n - l_n\right\} \\ l_n = \varphi(n) - \frac{\varphi'(n)}{\varphi'(n+1)}\varphi(n+1). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Nun handelt es sich darum, ein $\varphi'(n)$ so zu finden, daß

$$\text{neben } \overline{\lim}\ \lambda_n > 0\ (<0) \text{ stets auch } \overline{\lim}\ \lambda'_n > 0\ (<0),$$

daß aber, falls $\underline{\lim}\ \lambda_n = 0$ oder $\overline{\lim}\ \lambda_n = 0$ ist, immerhin noch $\overline{\lim}\ \lambda'_n > 0$ oder < 0 ausfallen kann.

Aus (11) ersieht man zunächst, daß, wenn

$$\lim_{n=+\infty} l_n = 0 \text{ und } \lim_{n=+\infty}\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} > 0 \tag{12}$$

ist und λ_n zwei von Null verschiedene und gleichbezeichnete Unbestimmtheitsgrenzen besitzt, dasselbe auch bezüglich λ'_n gilt. Ist dagegen von den Unbestimmtheitsgrenzen von λ_n mindestens die eine Null und soll dabei $\overline{\lim}\ \lambda'_n > 0$ oder < 0 ausfallen, so muß unter Festhaltung der ersten Bedingung (12) offenbar

$$\lim_{n=+\infty}\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = +\infty$$

sein, falls man nur annimmt, daß dieser Quotient überhaupt einen Grenzwert habe. Hiermit soll indessen keineswegs gesagt sein, daß jetzt wirklich $\overline{\lim}\ \lambda'_n > 0$ oder < 0 sein wird.

1) Vgl. Gmeiner, Monatshefte f. Math. u. Phys. 16 (1905), S. 113—124.

Demnach wird man, um eine geordnete Kriterienfolge zu erhalten, zu jedem schon gesetzten $\varphi(n)$ das nächstfolgende $\varphi'(n)$ so wählen, daß

$$\lim_{n=+\infty} l_n = 0 \text{ und } \lim_{n=+\infty} \frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = +\infty \tag{13}$$

wird. Den vorstehenden Forderungen entsprechen nacheinander die folgenden Funktionen $\varphi(n)$, worin die monotone Funktion erster Art μ_n so gewählt zu denken ist, daß $\mu_{n+1} : \mu_n$ bei $\lim n = +\infty$ endlich bleibt:

$$\frac{1}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \quad \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \quad \frac{\mu_n \log \mu_n}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \ldots \frac{L_r(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \ldots \tag{14}$$

Denn erstens ergibt jede derselben, für $\varphi(n)$ gesetzt, nach Nr. 5 eine divergente Reihe $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ und zweitens erfüllen je zwei aufeinander folgende von ihnen die Bedingungen (13).

Setzt man nämlich zunächst

$$\varphi(n) = \frac{1}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \quad \varphi'(n) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}-\mu_n},$$

so hat man

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = \mu_n \text{ und } l_n = \frac{1}{\mu_{n+1}},$$

wodurch die Bedingungen (13) offenbar erfüllt werden. Lassen wir jetzt

$$\varphi(n) = \frac{L_{r-1}(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n}, \quad \varphi'(n) = \frac{L_r(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n} \qquad (r \geqq 1)$$

sein, so ist

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = \frac{L_r(\mu_n)}{L_{r-1}(\mu_n)} = \log_r \mu_n, \text{ also } \lim_{n=+\infty} \frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = +\infty;$$

ferner

$$l_n = \frac{L_{r-1}(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n} - \frac{L_r(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n} \cdot \frac{L_{r-1}(\mu_{n+1})}{L_r(\mu_{n+1})} = \frac{L_{r-1}(\mu_n)}{\log_r \mu_{n+1}} \cdot \frac{\log_r \mu_{n+1} - \log_r \mu_n}{\mu_{n+1}-\mu_n},$$

somit nach Formel (8) in Nr. 4

$$l_n < \frac{M^r}{\log_r \mu_{n+1}}, \text{ also } \lim_{n=+\infty} l_n = 0.$$

Wählt man an Stelle von $\varphi(n)$ in dem Kriterium (8) nacheinander die Funktionen (14), so gewinnt man die Kriterienfolge:

Die Reihe Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$\underline{\lim} \left\{ \frac{1}{\mu_{n+1}-\mu_n} - \frac{1}{\mu_{n+2}-\mu_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \right\} > 0 \text{ oder } < 0, \tag{15}$$

und ebenso, je nachdem für einen der Werte $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\overline{\lim}\left\{\frac{L_r(\mu_n)}{\mu_{n+1}-\mu_n}-\frac{L_r(\mu_{n+1})}{\mu_{n+2}-\mu_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right\}>0 \text{ oder } <0 \qquad (16)$$

ist.

Setzt man hier $\mu_n = n$, so erhält man die gewöhnlichen logarithmischen Kriterien zweiter Art:

Die Reihe Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$\overline{\lim}\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}<1 \text{ oder } >1, \text{ [1]} \qquad (17)$$

und ebenso, je nachdem für einen Wert $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\overline{\lim}\left\{L_r(n)-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}L_r(n+1)\right\}>0 \text{ oder } <0 \text{ [2]} \qquad (18)$$

ist.

9. Umformung der Kriterien zweiter Art für den Fall, daß $\lim(a_{n+k+1}:a_{n+k})=1$ ist.

Setzt man voraus, daß die auf ihre Konvergenz oder Divergenz zu prüfende Reihe Σa_n die Eigenschaft besitze, daß

$$\lim_{n=+\infty}(a_{n+k+1}:a_{n+k})=1 \qquad (19)$$

ist, so kann man den soeben aufgestellten Kriterien (18) eine für die Anwendung einfachere Gestalt geben.[3] Hinsichtlich des ersten, dem Werte $r = 0$ entsprechenden Kriteriums (18) ergibt sich aus

$$n-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)=n\left(1-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right)-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$$

gemäß der Voraussetzung (19)

$$\overline{\lim}\left\{n-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)\right\}=\overline{\lim}\left\{n\left(1-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right)\right\}-1,$$

und wir erhalten somit das Raabesche Kriterium[4]:

Wenn $\lim(a_{n+k+1}:a_{n+k})=1$ ist, so konvergiert oder divergiert die Reihe Σa_n, jenachdem

$$\overline{\lim}\, n\left(1-\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right)>1 \text{ oder } <1. \qquad (20)$$

---

1) Cauchy, Cours d'Analyse, S. 134.

2) Die Folgen von logarithmischen Kriterien zweiter Art gehen zurück auf Bertrand (a. a. O. S. 44) und O. Bonnet (a. a. O. S. 95).

3) Eine analoge Vereinfachung kann man unter der nämlichen Voraussetzung (19) auch an den allgemeinen Kriterien (16) vornehmen, falls man nur μ_n so wählt, daß

$$\lim_{n=+\infty}\frac{\mu_{n+2}-\mu_{n+1}}{\mu_{n+1}-\mu_n}=1$$

ist. Vgl. Übung 10).

4) J. L. Raabe, Zeitschrift f. Phys. u. Math. von Baumgartner und v. Ettinghausen, 10. Bd. (1832), S. 63. Dortselbst erscheint das Kriterium in der dem Typus (9) entsprechenden Gestalt-

Zusatz. „Wenn der Ausdruck

$$\lambda_n = n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right)$$

bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzt, so wird a_n von einem bestimmten Werte m des n an eine monotone Funktion von n und es ist dabei $\lim a_n = 0$ oder $+\infty$, je nachdem dieser Grenzwert positiv oder negativ ist."

Man hat nämlich

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - \frac{\lambda_n}{n}$$

und hieraus findet man

$$a_n = a_{m+k} \prod_{m}^{n-k-1} \left(1 - \frac{\lambda_p}{p}\right), \tag{21}$$

wobei wegen $a_n > 0$ $\lambda_p < p$ sein muß. Ist nun $\lim \lambda_n > 0$, so gibt es eine positive Zahl α, so daß von einer bestimmten Stelle $p = p_0$ an $\lambda_p > \alpha$ ist. Demnach divergiert nach Nr. 5 die unendliche Reihe $\sum \frac{\lambda_p}{p}$ und es ist nach „Arithmetik" IX, 12 $\lim a_n = 0$. Außerdem ersieht man aus (21), daß mindestens von $n = p_0 + k + 1$ an $a_{n+1} < a_n$ ist. Wenn dagegen $\lim \lambda_n < 0$, so gibt es eine positive Zahl β derart, daß von einer bestimmten Stelle $p = p_1$ an $\lambda_p < -\beta$ ist. Somit divergiert nach Nr. 5 die Reihe $\sum \frac{-\lambda_p}{p}$ und man hat nach „Arithmetik" IX, 12 $\lim a_n = +\infty$. Aus (21) erkennt man noch, daß mindestens von $n = p_1 + k + 1$ an $a_{n+1} > a_n$ sein wird.

Für $r \geqq 1$ läßt sich das Kriterium (18) in der folgenden Weise umgestalten. Wir setzen

$$\Lambda_n = L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1), \quad \Lambda'_n = L_r(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_r(n+1)$$

und

$$\Lambda'_n = \Lambda_n \log_r n - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \varrho_n. \tag{22}$$

Es ist dann

$$\varrho_n = L_r(n+1) - L_{r-1}(n+1)\log_r n = L_{r-1}(n+1)\{\log_r(n+1) - \log_r n\}$$

und man findet mittels der Formel (12) in Nr. 4, indem man dort $\mu_n = n$ setzt, unmittelbar

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n = M^r.$$

Somit ergibt sich aus (22) unter Berücksichtigung von (19)

$$\overline{\lim}\, \Lambda'_n = \overline{\lim}\,(\Lambda_n \log_r n) - M^r.$$

Demnach können wir jetzt sagen:

Wenn $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) = 1$ ist, so konvergiert oder divergiert die Reihe Σa_n, jenachdem für einen der Werte $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim} \left\{ L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1) \right\} \log_r n > M^r \text{ oder } < M^r. \quad (23)$$

Zusatz. „Wenn der Ausdruck

$$\lambda_n = \left\{ L_{r-1}(n) - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_{r-1}(n+1) \right\} \log_r n \quad (24)$$

bei $\lim n = +\infty$ einen bestimmten Grenzwert besitzt und der letztere nicht $-\infty$ ist, so wird a_n sicher schließlich monoton und es ist $\lim a_n = 0$."

Beweis des Zusatzes. Zufolge (24) ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{L_r(n) - \lambda_n}{L_{r-1}(n+1) \log_r n} \quad (25)$$

und da die linke Seite dieser Gleichung positiv und für hinlänglich große Werte von n $(n \geqq m)$ auch

$$L_r(n) > 0, \quad L_{r-1}(n+1) > 0, \quad \log_r n > 0$$

ist, so folgt daraus zunächst

$$\lambda_n < L_r(n) \quad (n \geqq m). \quad (26)$$

Ferner kann man die Gleichung (25) in der Form

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{L_{r-1}(n)}{L_{r-1}(n+1)} \left\{ 1 - \frac{\lambda_n}{L_r(n)} \right\} \quad (27)$$

schreiben, woraus man

$$a_n = a_{m+k} \frac{L_{r-1}(m)}{L_{r-1}(n-k)} \prod_m^{n-k-1} \left(1 - \frac{\lambda_p}{L_r(p)} \right) \quad (28)$$

findet. Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $\lim \lambda_n$ positiv ist oder nicht.

α) Es sei $\lim \lambda_n > 0$. Dann kann man die Zahl m so groß annehmen, daß für alle $p \geqq m$ $\lambda_p > 0$ und wegen (26)

$$0 < \frac{\lambda_p}{L_r(p)} < 1$$

wird. Demnach nimmt die rechte Seite von (28) bei wachsendem n beständig ab und man hat $a_{n+1} < a_n$ für alle Werte $n \geqq m$. Außerdem ergibt sich aus (28)

$$a_n < a_{m+k} \frac{L_{r-1}(m)}{L_{r-1}(n-k)}, \quad \text{somit} \quad \lim a_n = 0.$$

β) Um auch den Fall $\lim \lambda_n \leqq 0$ zu erledigen, benützen wir die Formel (16) in Nr. 4. Auf Grund derselben können wir der vorstehenden

Gleichung (27) die Gestalt geben

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \left(1 - Q_{r-1}(n) + \frac{w_{r-1}(n)}{n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{L_r(n)}\right), \tag{29}$$

worin

$$Q_{r-1}(n) = \frac{1}{n} + \frac{M}{L_1(n)} v_1(n) + \frac{M^2}{L_2(n)} v_2(n) + \cdots + \frac{M^{r-1}}{L_{r-1}(n)} v_{r-1}(n) \tag{30}$$

ist und $v_1(n)$, $v_2(n), \ldots v_{r-1}(n)$ sowie $w_{r-1}(n)$ Funktionen von n bedeuten, welche bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert 1 besitzen. Schreiben wir jetzt

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 - Q_{r-1}(n) - \frac{\varkappa_n}{L_r(n)}, \tag{31}$$

so ist zufolge (29)

$$\varkappa_n = \lambda_n \left(1 - Q_{r-1}(n) + \frac{w_{r-1}(n)}{n^2}\right) - \frac{L_r(n)}{n^2} w_{r-1}(n)$$

und hieraus erkennt man im Hinblicke auf die obige Gleichung (30) und auf die Formel (5) in Nr. 4, daß

$$\lim \varkappa_n = \lim \lambda_n$$

ist. Ferner findet man aus (31)

$$a_n = a_{m+k} \prod_{m}^{n-k-1} \left\{1 - Q_{r-1}(p) - \frac{\varkappa_p}{L_r(p)}\right\}. \tag{32}$$

Hierin ist nach (30)

$$\lim_{p=+\infty} p\, Q_{r-1}(p) = 1$$

und zwar zufolge der am Schlusse von Nr. 4 gemachten Bemerkung auch für den Fall, daß $r = 1$ ist. Da $\lim \varkappa_n$ endlich ist, so hat man auch

$$\lim_{p=+\infty} \left\{p\, Q_{r-1}(p) + \frac{p \varkappa_p}{L_r(p)}\right\} = 1.$$

Es gibt demnach zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere p_0, so daß für $p \geqq p_0$

$$\frac{1-\varepsilon}{p} < Q_{r-1}(p) + \frac{\varkappa_p}{L_r(p)} < \frac{1+\varepsilon}{p}$$

wird. Somit divergiert die unendliche Reihe

$$\sum \left(Q_{r-1}(p) + \frac{\varkappa_p}{L_r(p)}\right)$$

und man hat zufolge (32) $a_{n+1} < a_n$ und zufolge „Arithmetik“ IX, 12 $\lim a_n = 0$.

10. Die wichtigste Anwendung der vorstehenden Sätze bildet die folgende Regel.

„Angenommen es sei für alle Werte $n \geqq m$ a_{n+k} reell und nicht Null und es lasse sich $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ auf die Form bringen

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda}, \tag{33}$$

wo μ, λ Konstante, die letztere > 1, $\omega(n)$ eine Funktion bedeutet, die bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat; so kann man schließen:

1. „Daß die a_n von einem bestimmten Werte von n an gleichbezeichnet sind und eine einsinnige Funktion von n bilden. Es existiert also $\lim a_n$ und zwar ist er bei $\mu > 0$ unendlich, bei $\mu < 0$ Null; bei $\mu = 0$ weder 0 noch unendlich. Doch muß, wenn im letzten Falle $\lim \omega(n) = 0$, noch angenommen werden, daß $\omega(n)$ schließlich ein und dasselbe Zeichen behält."

2. „Daß die Reihe Σa_n divergiert, wenn $\mu \geqq -1$; konvergiert, wenn $\mu < -1$."

Die Behauptungen im Falle $\mu \gtrless -1$ ergeben sich aus dem Kriterium (20) von Nr. 9 bezw. dessen Zusatz; nur daß bei $\mu = 0$ a_n schließlich monoton und $\lim a_n$ weder 0 noch unendlich ist, ist nach „Arithmetik" IX, 12 zu zeigen durch Betrachtung des Produktes

$$a_n = a_{m+k} \prod_m^{n-k-1} \left\{1 + \frac{\omega(p)}{p^\lambda}\right\} \quad (\lambda > 1),$$

worin die konvergente Reihe $\sum \frac{\omega(p)}{p^\lambda}$ vorkommt (Nr. 6). — Wenn $\mu = -1$ ist, so wird a_n nach dem Zusatze S. 268 wieder schließlich monoton und $\lim a_n = 0$. Die Divergenz von Σa_n erkennt man in diesem Falle mit Hilfe des ersten Kriteriums (23) S. 269. Setzt man nämlich

$$\varkappa_n = \left\{n - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)\right\} \log n,$$

so hat man zufolge (33)

$$\varkappa_n = \frac{\log n}{n} - \left\{\frac{\log n}{n^{\lambda-1}} + \frac{\log n}{n^\lambda}\right\} \omega(n)$$

und daher gemäß der Formel (1) S. 253 $\lim \varkappa_n = 0$.

Die vorstehende Regel wird insbesondere dann gebraucht, wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in eine endliche oder konvergente unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $1 : n$ entwickelt werden kann[1]), d. h. wenn für $n \geqq m$

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \cdots \tag{34}$$

Dann ist $\mu = c_1$, $\lambda = 2$ und

$$\omega(n) = c_2 + \frac{c_3}{n} + \cdots,$$

1) Weierstraß, Werke I, S. 177.

so daß nach V, 4 $\lim \omega(n) = c_2$. Wenn $c_2 = 0$, hat man doch $\lim \omega(n) = +0$ oder -0.

Beispiel.[1]) Ist

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \frac{n^r + b_1 n^{r-1} + b_2 n^{r-2} + \cdots + b_r}{n^r + c_1 n^{r-1} + c_2 n^{r-2} + \cdots + c_r} = R(n),$$

wo im Zähler und Nenner ganze Funktionen r^{ten} Grades von n stehen, so kann man die rechte Seite leicht auf die Form (33) bringen, indem man Zähler und Nenner durch n^r dividiert. Die rationale Funktion $R(n)$ läßt sich auch in eine Reihe von der Form (34) entwickeln. Zunächst hat man

$$n^r + b_1 n^{r-1} + \cdots + b_r = n^r \left\{ 1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_r}{n^r} \right\}$$

$$n^r + c_1 n^{r-1} + \cdots + c_r = n^r (1 + \nu_n), \quad \nu_n = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_r}{n^r}.$$

Da $\lim \nu_n = 0$, so ist

$$\frac{1}{1+\nu_n} = 1 - \nu_n + \nu_n^2 - \cdots$$

für alle n größer als eine gewisse Zahl $\mu > 0$. Nach dem Satze in V, 7 kann man diesen Ausdruck für alle $(1:n) < \varkappa$ in eine absolut konvergierende Reihe nach Potenzen von $1:n$ verwandeln. Es ist

$$\frac{1}{1+\nu_n} = 1 - \frac{c_1}{n} + \frac{c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots;$$

also nach dem 7. Satze in „Arithmetik“ IX, 10

$$R(n) = 1 + \frac{b_1 - c_1}{n} + \frac{b_2 - b_1 c_1 + c_1^2 - c_2}{n^2} + \cdots$$

Somit konvergiert Σa_n, wenn $b_1 - c_1 < -1$; die Reihe divergiert, wenn $b_1 - c_1 \geqq -1$.

11. Kriterien für alternierende Reihen.

Es seien $a_0, a_1, a_2 \ldots$ positive Zahlen und die unendliche Reihe $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$ vorgelegt, die wir kurz mit $\Sigma(-1)^n a_n$ bezeichnen.

Satz. 1) „Die Reihe $\Sigma(-1)^n a_n$ konvergiert [und zwar absolut] oder divergiert, je nachdem $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) < 1$ oder > 1. Im letzteren Falle sind die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$$

bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$.“

2) „Läßt sich für alle Werte von $n \geqq m$ der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ auf die Form

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda} \qquad (\lambda > 1)$$

bringen, wo $\omega(n)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat,

1) Gauß Werke III, S. 139.

so konvergiert $\Sigma(-1)^n a_n$, wenn $\mu < 0$; und zwar absolut, wenn $\mu < -1$; nicht absolut, wenn $0 > \mu \geqq -1$."

„$\Sigma(-1)^n a_n$ divergiert, wenn $\mu > 0$ und wenn $\mu = 0$ und $\omega(n)$ schließlich ein und dasselbe Zeichen behält. Im ersteren Falle sind die Unbestimmtheitsgrenzen von s_n bei $\lim n = +\infty$ $+\infty$ und $-\infty$, im zweiten Falle sind sie endlich und voneinander verschieden."

Beweis. Die absolute Konvergenz von $\Sigma(-1)^n a_n$ in den oben erwähnten Fällen folgt unmittelbar aus der in der vorigen Nr. aufgestellten Regel. Die nicht absolute Konvergenz unserer Reihe, wenn $0 > \mu \geqq -1$, folgt aus „Arithmetik" S. 243, da a_n von einem gewissen Werte von n an mit wachsenden n beständig abnimmt und $\lim a_n = 0$. — Wo die Divergenz von $\Sigma(-1)^n a_n$ angegeben ist, ergibt sich dieselbe stets daraus, daß $\lim a_n$ von Null verschieden ist („Arithmetik" S. 231).

Umständlicher gestaltet sich der Nachweis der dort, wo $\Sigma(-1)^n a_n$ divergiert, angezeigten Unbestimmtheitsgrenzen von s_n bei $\lim n = +\infty$. Wir setzen, unter l einen beliebigen Index verstanden,

$$a_{l+1} - a_{l+2} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{l+p} = r_{l,p}, \qquad s_{l+p} = s_l + (-1)^{l+1} r_{l,p},$$

und untersuchen das Verhalten von $r_{l,p}$ bei $\lim p = +\infty$. Ist $\lim (a_{n+k+1} : a_{n+k}) > 1$ oder im zweiten Teile unseres Satzes $\mu > 0$, so kann man behaupten, daß positive Zahlen μ' existieren, so daß

$$n\left(\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} - 1\right) > \mu' > 0,$$

wenn nur $n \geqq m$. Es ist nämlich der Grenzwert der linken Seite bei $\lim n = +\infty$ entweder $+\infty$ oder μ. Man hat somit

$$a_{n+k+1} - a_{n+k} > \frac{\mu'}{n} a_{n+k}.$$

Und weiter für $l = m + k$

$$r_{l,2q} < -\mu'\left\{\frac{a_{l+1}}{l-k+1} + \frac{a_{l+3}}{l-k+3} + \cdots + \frac{a_{l+2q-1}}{l-k+2q-1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu'\left\{\frac{a_{l+2}}{l-k+2} + \frac{a_{l+4}}{l-k+4} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{l-k+2q}\right\}.$$

Nun wachsen die a_{l+p} mit p beständig, so daß sich ergibt

$$r_{l,2q} < -\mu' a_{l+1}\left\{\frac{1}{l-k+1} + \frac{1}{l-k+3} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q-1}\right\},$$

$$r_{l,2q+1} > \mu' a_{l+2}\left\{\frac{1}{l-k+2} + \frac{1}{l-k+4} + \cdots + \frac{1}{l-k+2q}\right\},$$

woraus vermöge der Divergenz der harmonischen Reihen geschlossen werden kann

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,2q} = -\infty, \qquad \lim_{q=+\infty} r_{l,2q+1} = +\infty.$$

Wenn im zweiten Teile des Satzes $\mu = 0$, so genügt die Betrachtung

eines der Ausdrücke $r_{l,2q}$, $r_{l,2q+1}$, da aus der Gleichung

$$r_{l,2q+1} = r_{l,2q} + a_{l+2q+1}$$

sich ergibt, daß wenn einer derselben bei $\lim q = +\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt, so auch der andere, und zwar einen vom ersteren verschiedenen. Wir haben nun zu unterscheiden, ob der endliche $\lim \omega(n)$ negativ, bezw. -0, oder ob er positiv, bezw. $+0$. Im ersteren Falle nehmen die a_n von einem gewissen Werte des Index an mit demselben beständig ab, so daß wir nach „Arithmetik" IX, 8 bemerken können, daß $r_{l,1} > r_{l,3} > r_{l,5} \cdots$ Es existiert mithin bei $\lim q = +\infty$ ein Grenzwert für $r_{l,2q+1}$, der aber nicht $-\infty$ sein kann. Da $\lim \omega(n) = -\gamma$ $(\gamma \geqq 0)$, so hat man, was auch $\varepsilon > 0$ sein mag, einen Index m, so daß für

$$n \geqq m \qquad 1 - \frac{(\gamma+\varepsilon)}{n^\lambda} < \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} < 1, \text{ d. i.}$$

$$-\frac{(\gamma+\varepsilon)\,a_{n+k}}{n^\lambda} < a_{n+k+1} - a_{n+k} < 0.$$

Setzt man $m + k = l$, so folgt weiter

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)\left\{\frac{a_{l+2}}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{a_{l+4}}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{a_{l+2q}}{(l-k+2q)^\lambda}\right\},$$

also auch

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\left\{\frac{1}{(l-k+2)^\lambda} + \frac{1}{(l-k+4)^\lambda} + \cdots + \frac{1}{(l-k+2q)^\lambda}\right\}.$$

Es konvergiert aber nach Nr. 6 die unendliche Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{(l-k+2q)^\lambda}$, da $\lambda > 1$. Bezeichnet man ihre Summe mit σ, so folgt

$$r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\sigma,$$

und weiter

$$\lim_{q=+\infty} r_{l,2q+1} > -(\gamma+\varepsilon)a_{l+2}\sigma.$$

Ganz ähnlich wird der Beweis im zweiten Falle geführt, wo die a_n schließlich mit dem Index beständig wachsen.

Anmerkung. Wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ in der Form (34) gegeben ist, so läßt sich der vorstehende Satz auch mittels der in der vorigen Nr. gegebenen Regel ableiten, indem nun auch der Quotient $\frac{a_{n+k+3} - a_{n+k+2}}{a_{n+k+1} - a_{n+k}}$ nach ganzen positiven Potenzen von $1 : n$ entwickelt werden kann.

12. Sätze über die Konvergenz und Divergenz von Reihen mit komplexen Gliedern von der Form $b_n a_n$.[1])

1) **Satz.** „Sind die a_n und b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ beliebige reelle

1) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie § 143. — Im folgenden werden mit a, b, c, ... in der Regel komplexe, mit α, β, γ, ... reelle Zahlen bezeichnet.

oder komplexe Zahlen von der Beschaffenheit, daß jede der beiden Reihen

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

und

$$|b_0 - b_1| + |b_1 - b_2| + \cdots + \cdots + |b_n - b_{n+1}| + \cdots \tag{2}$$

konvergiert und somit b_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt, so konvergiert auch die unendliche Reihe

$$b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n + \cdots“. \tag{3}$$

Der Satz folgt aus der Identität

$$\sum_0^n b_r a_r = \sum_0^{n-1} (b_r - b_{r+1}) s_r + b_n s_n, \tag{4}$$

worin

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

ist, bei $\lim n = +\infty$. Denn da die s_r ihrem Betrage nach unter einer positiven Zahl liegen, so konvergiert nach dem 3. Satze in „Arithmetik“ XIII, 6 neben (2) auch die Reihe

$$\sum_0^\infty (b_r - b_{r+1}) s_r$$

absolut.

Folgesätze. 1, a) „Wenn die reellen Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n, \cdots$ bei unbegrenzt wachsendem n einem endlichen Grenzwerte in einem Sinne sich nähern, so konvergiert neben (1) auch die Reihe $\Sigma \beta_n a_n$.“ — Denn die Reihe (2) konvergiert sicher, wenn man $b_n = \beta_n$ sein läßt.

1, b) „Wenn die Reihe (1) konvergiert und die Koordinaten γ_n, δ_n der Zahlen $b_n = \gamma_n + \delta_n i$ bei unbegrenzt wachsendem n je einem endlichen Grenzwerte monoton sich nähern, so konvergiert auch die Reihe (3).“ — Denn es konvergiert jede der beiden Reihen $\Sigma \gamma_n a_n$ und $\Sigma \delta_n a_n$.

2) **Satz.** „Wenn die Reihe (1) divergiert, dagegen die Reihe (2) konvergiert und b_n bei $\lim n = +\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzt, so divergiert die Reihe (3).“

Da nämlich $\Sigma(b_n - b_{n+1})$ absolut konvergiert und $\lim b_n$ nicht Null ist, so konvergiert ebenfalls absolut die Reihe

$$\sum \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \equiv \sum \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right), \text{ d. h. es konvergiert } \sum \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right|.$$

Würde nun die Reihe (3) konvergieren, so müßte nach dem 1. Satze auch $\sum \frac{1}{b_n} \cdot b_n a_n$ d. i. die Reihe (1) konvergieren.

Folgesätze. 2, a) „Wenn die reellen Zahlen β_n bei unbegrenzt wachsendem n einem von Null verschiedenen endlichen Grenz-

werte sich in einem Sinne nähern, so divergiert neben (1) auch die Reihe $\Sigma\beta_n b_n$." (Vgl. die Begründung des Satzes 1, a).)

2, b) „Wenn die Reihe (1) divergiert und die Koordinaten γ_n, δ_n der Zahlen $b_n = \gamma_n + \delta_n i$ bei unbegrenzt wachsendem n je einem endlichen Grenzwerte γ bezw. δ, von denen mindestens der eine von Null verschieden ist, monoton sich nähern, so divergiert auch die Reihe (3)." — Denn zufolge dieser Voraussetzungen konvergieren die Reihen $\Sigma|\gamma_n - \gamma_{n+1}|$ und $\Sigma|\delta_n - \delta_{n+1}|$. Wegen

$$|b_n - b_{n+1}| \leqq |\gamma_n - \gamma_{n+1}| + |\delta_n - \delta_{n+1}|$$

konvergiert daher auch die Reihe (2). Ferner ist $\lim b_n = \gamma + \delta i$ von Null verschieden, so daß die Bedingungen des Satzes 2) erfüllt sind.

3) **Satz.** „Wenn die Teilsummen s_n der Reihe (1) dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C liegen, b_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null hat und die Reihe (2) konvergiert, so konvergiert auch die Reihe (3)."

Der Satz ergibt sich wieder aus der Identität (4).

Folgesätze. 3, a) „Unter der nämlichen Voraussetzung über s_n konvergiert die Reihe $\Sigma\beta_n a_n$, wenn die reellen Zahlen β_n bei unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwerte Null in einem Sinne sich nähern." — Denn es konvergiert (2).

3, b) „Unter derselben Voraussetzung über s_n konvergiert die Reihe (3) auch dann, wenn sich die beiden Koordinaten γ_n, δ_n von b_n bei unbegrenzt wachsendem n dem Grenzwerte Null monoton nähern." — Denn zufolge des Satzes 3, a) konvergiert jede der beiden Reihen $\Sigma\gamma_n a_n$ und $\Sigma\delta_n a_n$, also auch $\Sigma(\gamma_n + \delta_n i)a_n$ d. i. die Reihe (3).

3, c) „Wenn die Reihe (2) konvergiert und b_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null hat, so konvergiert die Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

sicher für alle Werte von x, deren absoluter Betrag die Zahl 1 nicht überschreitet, ausgenommen $x = 1$." — Ist nämlich $|x| \leqq 1$, jedoch x nicht 1, so hat man wegen

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$|s_n| \leqq 2 : |1 - x|.$$

4) **Satz.** „Liegen die Teilsummen s_n der Reihe (1) dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl C und nähern sich die reellen Zahlen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n, \ldots$ bei unbegrenzt wachsendem n einem endlichen Grenzwerte β in einem Sinne, so liegen auch die Summen

$$w_n = \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

dem absoluten Betrage nach unter einer positiven Zahl. — Das

Nämliche gilt von den Summen

$$W_n = b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn die Koordinaten γ_n, δ_n von $b_n = \gamma_n + \delta_n i$ bei unbegrenzt wachsendem n je einem endlichen Grenzwerte monoton sich nähern."

Ersetzt man nämlich in (4) die b_r durch die β_r, so findet man unmittelbar

$$|w_n| < C\left|\sum_0^{n-1}(\beta_r - \beta_{r+1})\right| + C|\beta_n| = C\{|\beta_0 - \beta_n| + |\beta_n|\},$$

$$\text{also} \quad |w_n| < C\{|\beta_0| + 2|\beta_n|\}.$$

Nun liegen aber die Zahlen $|\beta_n|$ unter einer positiven Zahl, und zwar entweder unter $|\beta_0|$ oder unter $|\beta|$, wodurch der erste Teil des Satzes erwiesen ist. Der zweite Teil ergibt sich unmittelbar aus dem ersten, da

$$W_n = \sum_0^n \gamma_r a_r + i \sum_0^n \delta_r a_r.$$

5) **Satz.** „Es sei $b_n = \gamma_n + \delta_n i$ und wir setzen voraus, daß $|b_n|$, γ_n, δ_n monotone Funktionen von n seien und $|b_n|$ bei $\lim n = +\infty$ einen positiven endlichen Grenzwert habe. Wenn dann die $|s_n|$ nicht unter einer positiven Zahl liegen, so gilt dasselbe auch von den Zahlen $|W_n|$. Hierbei haben s_n und W_n dieselbe Bedeutung wie im Satze 4)."

Würden nämlich die W_n ihrem Betrage nach unter einer positiven Zahl liegen, so müßte zufolge 4) dasselbe auch bezüglich der Summen

$$\sum_0^n \frac{b_r a_r}{\gamma_r^2 + \delta_r^2}, \quad \sum_0^n \frac{b_r a_r (\gamma_r - \delta_r i)}{\gamma_r^2 + \delta_r^2} \text{ d. i. } s_n$$

der Fall sein.

13. Kriterien der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit komplexen Gliedern a_n im Falle, daß der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich in eine ganze Potenzreihe von $1 : n$ entwickeln läßt.

Gelingt es mit Hilfe der in den Nr. 5—10 gegebenen Sätze zu zeigen, entweder daß die absoluten Beträge der Glieder der Reihe Σa_n eine konvergente Reihe bilden, oder daß $|a_n|$ bei $\lim n = +\infty$ einen positiven Grenzwert hat, so ist im ersten Falle die Konvergenz, im zweiten die Divergenz von Σa_n erwiesen.[1]) So erkennt man z. B., daß die Reihe Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$\lim_{n=+\infty} |a_{n+k+1} : a_{n+k}|,$$

1) Nach Pringsheim [Archiv f. Math. u. Ph. III. 4 (1903) S. 1 u. d. f.] kann man den Kriterien zweiter Art noch eine für die Anwendung auf komplexe Reihen bequemere Gestalt geben, worauf wir indessen hier nur hinweisen wollen.

wo k wie bisher eine feste ganze Zahl bedeutet, kleiner oder größer als 1 ist. Wenn aber bei

$$\lim n = +\infty \qquad \lim a_n = 0$$

ist und dabei $\Sigma|a_n|$ divergiert, so läßt sich über das Verhalten der Reihe Σa_n erst durch eine weitere Untersuchung entscheiden.

Die Untersuchung läßt sich vollständig erledigen im Falle, daß der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich für hinlänglich große Werte von n in eine konvergente ganz Potenzreihe von $1:n$ entwickeln läßt, d. i. daß für alle Werte von n nicht kleiner als eine bestimmte ganze Zahl m

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots \tag{4*}$$

ist. Man hat demnach

$$\lim_{n=+\infty} \left| \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \right| = |c_0| .$$

Je nachdem $|c_0|$ kleiner oder größer als 1 ist, konvergiert absolut oder divergiert dem Vorstehenden zufolge die Reihe Σa_n. Wenn $c_0 = 1$ ist, so beantwortet der sogleich anzuführende Satz von Weierstraß [1]) die Frage nach dem Verhalten der genannten Reihe vollständig. Ist $|c_0| = 1$, c_0 selbst jedoch von 1 verschieden, so setze man $a_n = b_n c_0^n$, so daß sich aus (4*) die Entwicklung

$$\frac{b_{n+k+1}}{b_{n+k}} = 1 + \frac{c_1}{c_0} \cdot \frac{1}{n} + \frac{c_2}{c_0} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots$$

ergibt. Wir haben somit die Frage im letzten Falle zurückgeführt auf die Untersuchung der ganzen Potenzreihe $\Sigma b_n c_0^n$, deren Koeffizienten b_n die unten in (5) verlangte Bedingung erfüllen. Diese Untersuchung wird uns in der nächsten Nr. beschäftigen.

Satz. „Es sei gegeben eine endlose Folge von Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ und es sei $|a_n| = A_n$. Angenommen der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ lasse sich von einem bestimmten Werte von n an in eine endliche oder unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $1:n$ verwandeln:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots, \quad (n \geqq m), \tag{5}$$

wo

$$c_r = \mu_r + \nu_r i \quad (r = 1, 2 \ldots) \tag{6}$$

sein soll, so kann man folgendes schließen:

I) Ist $\mu_1 > 0$, so ist

$$\lim A_n = +\infty$$

und zwar wächst A_n von einem bestimmten Werte von n an mit n

1) Vgl. Weierstraß, Werke I, S. 177—189.

beständig. Die Reihe Σa_n divergiert, ihre Partialsummen

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad (n = 0, 1, ..) \tag{7}$$

liegen ihrem absoluten Betrage nach nicht unter einer positiven Zahl.

II) Ist $\mu_1 = 0$, so nähert sich A_n bei

$$\lim n = +\infty$$

einem positiven endlichen Grenzwerte und zwar von einem bestimmten Werte von n an in einem Sinne.

1) Ist $\nu_1 \gtrless 0$, so hat a_n selbst bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwert.

2) Ist $\nu_1 = 0$, so hat a_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert.

Die Reihe Σa_n divergiert auch in diesen Fällen, und zwar liegen die absoluten Beträge der Summen (7) nicht unter einer positiven Zahl.

III) Ist $\mu_1 < 0$, so ist $\lim \mathsf{A}_n = 0$, und zwar nimmt A_n von einem bestimmten Werte von n an mit wachsendem n beständig ab.

1) Falls $0 > \mu_1 \geqq -1$ ist, so divergiert die Reihe Σa_n. Die absoluten Beträge der Summen (7) liegen unter einer positiven Zahl dann und nur dann, wenn $\mu_1 = -1$ und $\nu_1 \gtrless 0$ ist.

2) Falls $\mu_1 < -1$, so konvergiert die Reihe Σa_n absolut."

Beweis. Zunächst hat man nach (6)

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \left(1 + \sum_1^\infty{}_r \frac{\mu_r}{n^r}\right) + i \sum_1^\infty{}_r \frac{\nu_r}{n^r}. \tag{8}$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\mathsf{A}_{n+k+1}}{\mathsf{A}_{n+k}}\right)^2 = \left(1 + \sum_1^\infty{}_r \frac{\mu_r}{n^r}\right)^2 + \left(\sum_1^\infty{}_r \frac{\nu_r}{n^r}\right)^2 = 1 + \frac{2\mu_1}{n} + \frac{\mu_1^2 + \nu_1^2 + 2\mu_2}{n^2} + \cdots$$

Zieht man hier die Quadratwurzel und entwickelt die rechte Seite mit Hilfe der binomischen Reihe („Arithmetik" IX, 15) unter Berücksichtigung des Cauchy'schen Satzes in V, 7 nach Potenzen von $1 : n$, so ergibt sich bei hinlänglich großen Werten von n die Formel

$$\frac{\mathsf{A}_{n+k+1}}{\mathsf{A}_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1}{n} + \frac{\nu_1^2 + 2\mu_2}{2n^2} + \cdots \tag{9}$$

Mittels des Satzes in Nr. 10 schließen wir hieraus: „A_n ist von einem bestimmten Werte von n an eine einsinnige Funktion von n und es ist, jenachdem μ_1 positiv, Null oder negativ ist, $\lim \mathsf{A}_n + \infty$, endlich und positiv oder Null. Die Reihe $\Sigma \mathsf{A}_n$ divergiert oder konvergiert, je nachdem $\mu_1 \geqq -1$ oder $\mu_1 < -1$ ist." Somit konvergiert die Reihe Σa_n absolut dann und nur dann, wenn $\mu_1 < -1$ ist, und sie divergiert sicher, wenn $\mu_1 \geqq 0$ ist.

Setzt man ferner

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i = \mathsf{A}_n \{\cos \theta_n + i \sin \theta_n\},$$

so daß

$$\frac{e_{n+k-1}}{e_{n+k}} = \frac{A_{n+k-1}}{A_{n+k}}\left(\cos\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) - i\sin\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right)\right)$$

ist, so ergibt sich nach (8)

$$\frac{A_{n+k-1}}{A_{n+k}}\cos\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) = 1 - \sum_{1}^{n}\frac{a_r}{n^r}$$

$$\frac{A_{n+k-1}}{A_{n+k}}\sin\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) = \sum_{1}^{n}\frac{\nu_r}{n^r}.$$

Daraus folgt, wenn man für $A_{n+k-1} : A_{n+k}$ die Reihe (9) einsetzt, nach V, 9

$$\cos\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) = 1 - \frac{\nu_1^2}{2n^2} - \cdots$$

$$\sin\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2 - a_1\nu_1}{n^2} - \cdots$$

Wenn nun n groß genug ist, so ist

$$\cos\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right)$$

positiv, somit liegt $\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Man findet demnach aus der letzten Gleichung nach V, 26 mit Berücksichtigung der Formel

$$\sin\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) = \left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right) - \tfrac{1}{6}\left(\theta_{n+k-1}-\theta_{n+k}\right)^3 + \cdots$$

(vgl. VIII, 5 oder Arithmetik XIII, 7)

$$\theta_{n+k-1} - \theta_{n+k} = \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2 - a_1\nu_1}{n^2} - \cdots, \tag{10}$$

zunächst für hinlänglich große Werte von n. Zerlegt man nun die Differenz $\theta_{n+k-1} - \theta_{m+k}$, wo m eine konstante Zahl bedeutet, wie folgt:

$$\theta_{n+k-1} - \theta_{m+k} = \left(\theta_{m+k+1} - \theta_{m+k}\right) + \left(\theta_{m+k+2} - \theta_{m+k+1}\right) + \cdots + \left(\theta_{n+k-1} - \theta_{n+k}\right),$$

so erkennt man, daß das Verhalten von θ_n bei

$$\lim n = +\infty$$

aus dem der unendlichen Reihe

$$\left(\theta_{m+k+1} - \theta_{m+k}\right) + \left(\theta_{m+k+2} - \theta_{m+k+1}\right) + \cdots \tag{11}$$

erschlossen werden kann. Da ihre Glieder als gleichbezeichnet betrachtet werden dürfen, und

$$\lim n\left(\theta_{n+k-1} - \theta_{n+k}\right) = \nu_1$$

ist, so divergiert die Reihe (11) falls ν_1 nicht Null ist; sie konvergiert aber, falls $\nu_1 = 0$ ist, weil nunmehr entweder $\theta_{n+k-1} - \theta_{n+k}$ identisch verschwindet oder es eine natürliche Zahl $h > 1$ gibt, wofür

ein endlicher Grenzwert

$$\lim n^h (\theta_{n+k+1} - \theta_{n+k}) \gtrless 0$$

vorhanden ist (vgl. Nr. 6). Demnach ist $\lim \theta_n$ endlich oder unendlich, je nachdem ν_1 Null oder nicht Null ist.

Wenn $\mu_1 = 0$ und $\nu_1 \gtrless 0$ ist, so hat A_n bei

$$\lim n = +\infty$$

einen endlichen positiven, θ_n einen unendlichen Grenzwert, folglich a_n keinen Grenzwert. Wenn $\mu_1 = \nu_1 = 0$ ist, so haben A_n und θ_n bei $\lim n = +\infty$ endliche und von Null verschiedene Grenzwerte, also auch a_n selbst.

Um die übrigen Teile unseres Satzes beweisen zu können, bedürfen wir des folgenden Hilfssatzes: „Sollten im Falle daß in (5) $c_1 = 0$ ist, α_n, β_n nicht von einem gewissen Werte von n an monotone Funktionen von n sein, so gibt es sicher unendlich viele komplexe Zahlen $\varkappa + \lambda i$ von der Eigenschaft, daß die beiden Koordinaten von

$$(\varkappa + \lambda i)\, a_n \quad \text{d. i.} \quad \varkappa\alpha_n - \lambda\beta_n, \quad \lambda\alpha_n + \varkappa\beta_n,$$

von einem bestimmten Werte von n an monoton sind." — In unserem Falle liefert die Gleichung (5)

$$\alpha_{n+k+1} + i\beta_{n+k+1} = (\alpha_{n+k} + i\beta_{n+k}) \left\{1 + \frac{\varphi_h(n) + i\psi_h(n)}{n^h}\right\}, \quad (h \geqq 2).$$

Lim $\varphi_h(n)$ und lim $\psi_h(n)$ sind beide endlich, einer von ihnen ist nicht Null. Zerlegt man hier in reellen und imaginären Teil, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\alpha_{n+k+1}}{\alpha_{n+k}} = 1 + \frac{1}{n^h}\left\{\varphi_h(n) - \frac{\beta_{n+k}}{\alpha_{n+k}}\psi_h(n)\right\}$$

$$\frac{\beta_{n+k+1}}{\beta_{n+k}} = 1 + \frac{1}{n^h}\left\{\varphi_h(n) + \frac{\alpha_{n+k}}{\beta_{n+k}}\psi_h(n)\right\}.$$

Um hieraus nach dem Satze von Nr. 10 schließen zu können, daß α_n, β_n von einem bestimmten Werte von n an monotone Funktionen von n sind, müßte man wissen, daß jeder der Faktoren von n^{-h} bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat und schließlich sein Zeichen nicht mehr ändert. Das wird man im allgemeinen schwerlich behaupten dürfen. Sollten aber die in Rede stehenden Ausdrücke die verlangte Eigenschaft nicht besitzen, so kann sie doch beigelegt werden denjenigen, welche aus ihnen dadurch hervorgehen, daß man α_{n+k}, β_{n+k} bezw. durch

$$\alpha'_{n+k} = \varkappa\alpha_{n+k} - \lambda\beta_{n+k}, \qquad \beta'_{n+k} = \lambda\alpha_{n+k} + \varkappa\beta_{n+k} \tag{12}$$

ersetzt, wenn nur die nicht zugleich verschwindenden Zahlen $\varkappa$, λ gehörig gewählt sind. Ersetzt man nämlich a_n durch $(\varkappa + \lambda i)a_n$, wodurch der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ sich nicht ändert, so treten die Aus-

drücke (12) an Stelle von α_{n+k}, β_{n+k}. — Es sei

$$\lim \alpha_n = \alpha \qquad \lim \beta_n = \beta$$
$$\lim \varphi_k(n) = \varphi_k \qquad \lim \psi_k(n) = \psi_k.$$

Wir schließen zunächst diejenigen Wertsysteme $\varkappa$, λ aus, wofür einer der Ausdrücke (12) den Grenzwert Null hat, also die Systeme $\omega\beta$, $\omega\alpha$; $\omega\alpha$, $-\omega\beta$, wo ω jede reelle Zahl außer Null sein darf. Auch jetzt noch lassen sich $\varkappa$, λ so bestimmen, daß jede der Funktionen

$$f_k'(n) = \varphi_k(n) - \frac{\beta'_{n+k}}{\alpha'_{n+k}}\psi_k(n)$$

$$g_k'(n) = \varphi_k(n) + \frac{\alpha'_{n+k}}{\beta'_{n+k}}\psi_k(n)$$

einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert besitzt und somit gewiß der obigen Bedingung genügt. Wenn $\psi_k = 0$ ist, so ist φ_k nicht Null und es reicht die bisherige Beschränkung der $\varkappa$, λ aus. Wenn ψ_k nicht Null ist, so kann man, wie leicht ersichtlich ist, $\varkappa$, λ so annehmen, daß der Grenzwert von $g_k'(n)$ bei $\lim n = +\infty$ eine beliebige, von Null und φ_k verschiedene Zahl g_k' wird. Zwischen g_k' und dem Grenzwerte f_k' von $f_k'(n)$ besteht die Beziehung

$$(\varphi_k - f_k')(g_k' - \varphi_k) = \psi_k^2$$

d. i.

$$f_k' = \frac{\varphi_k^2 + \psi_k^2 - \varphi_k g_k'}{\varphi_k - g_k'}.$$

Ist $\varphi_k = 0$, so ist f_k' nicht Null und ist φ_k von Null verschieden, so genügt es, um für f_k' eine endliche von Null verschiedene Zahl zu erhalten, g_k' auch nicht gleich

$$(\varphi_k^2 + \psi_k^2) : \varphi_k$$

zu setzen.

Der Satz 1) in III) und die Behauptungen über das Verhalten von $|s_n|$ im Falle, daß die Reihe Σa_n divergiert, werden nun auf folgende Art erwiesen. Zunächst bemerken wir, daß man, wenn die feste natürliche Zahl m so gewählt ist, daß neben $n \geqq m$ $|c_1 : n| < 1$ ist, der Gleichung (5) die Gestalt geben kann

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = \left(1 + \frac{c_1}{n}\right)\left\{1 + \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \cdots\right)\right\}$$
$$= \left(1 + \frac{c_1}{n}\right)\left(1 + \frac{c_2}{n^2} + \cdots\right) \qquad (n \geqq m).$$

Setzt man nun

$$a_{n+k} = p_n f_n,\ p_m = 1,\ \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + \frac{c_1}{n},$$

wodurch die Größen p_n und f_n vollkommen bestimmt sind, und

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{c_2}{n^2} + \cdots \quad (n \geqq m),$$

$$p_n = \left(1 + \frac{c_1}{m}\right)\left(1 + \frac{c_1}{m+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{c_1}{n-1}\right) \quad (n > m) \qquad (13)$$

wird, so hat der Ausdruck

$$f_n = a_{n+k} : p_n$$

nach Satz 2) in II) bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert. Aus dem vorstehenden Hilfssatze schließen wir noch, daß es solche, von Null verschiedene Zahlen b geben muß, daß die beiden Koordinaten der komplexen Zahl

$$g_n = b f_n = \varrho_n + \sigma_n i$$

von einem bestimmten Werte von n an monotone Funktionen von n sind.

Nun divergiert, wie wir sogleich zeigen werden, die unendliche Reihe Σp_n, falls $\mu_1 \geqq -1$ ist. Daraus folgt nach dem Satze 2, b) in Nr. 12, da neben f_n auch g_n einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert hat, daß unter der nämlichen Bedingung die unendliche Reihe $\Sigma g_n p_n$, also auch die vorgelegte Σa_n divergieren muß.

Die soeben benutzte Vergleichsreihe Σp_n stimmt, falls c_1 nicht gleich -1 ist, stets im wesentlichen mit der binomischen Reihe

$$1 - \binom{-1-c_1}{1} + \binom{-1-c_1}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{-1-c_1}{n} + \cdots \qquad (14)$$

überein (vgl. VIII. 9). Man hat nämlich für $n > m$

$$p_n = (-1)^{n-1}\binom{-1-c_1}{n-1} : \left\{\left(1 + \frac{c_1}{1}\right)\left(1 + \frac{c_1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{c_1}{m-1}\right)\right\}.$$

Das Verhalten der Reihe (14) läßt sich leicht beurteilen vermittels der Formel

$$1 - \binom{-1-c_1}{1} + \binom{-1-c_1}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{-1-c_1}{n} = (-1)^n \binom{-2-c_1}{n}, \qquad (15)$$

welche, da sie nach „Arithmetik" IX, 15 für alle reellen Werte von c_1 besteht, zufolge des 3. Satzes in IV, 2 auch für die komplexen Werte von c_1 gilt. Weil nun

$$(-1)^n \binom{-2-c_1}{n} : (-1)^{n-1}\binom{-2-c_1}{n-1} = 1 + \frac{1+c_1}{n} = 1 + \frac{(1+\mu_1)+\nu_1 i}{n}$$

ist, so erkennt man nach den zuerst erwiesenen Teilen I) und II) unseres Satzes, daß die Reihe (14) divergiert, wenn

$$\mu_1 + 1 \geqq 0 \text{ d. i. } \mu_1 \geqq -1$$

ist. Ihre Teilsummen (15) liegen dem absoluten Betrage nach nur dann unter einer positiven Zahl, wenn

$$\mu_1 + 1 \leqq 0 \text{ d. i. } \mu_1 \leqq -1$$

ist. Denn man hat

$$\left|\binom{-2-c_1}{n}\right|^2 = \prod_1^n \left\{1 + \frac{2(\mu_1+1)}{r} + \frac{\mu_1^2+\nu_1^2}{r^2}\right\},$$

woraus sich das Gesagte nach „Arithmetik" IX, 12 ergibt, indem die Reihe

$$\sum_1^\infty \left\{\frac{2(\mu_1+1)}{r} + \frac{\mu_1^2+\nu_1^2}{r^2}\right\}$$

nach Nr. 5 und 6 konvergiert, wenn $\mu_1 + 1 = 0$, dagegen divergiert, wenn $\mu_1 + 1 > 0$ oder $\mu_1 + 1 < 0$ ist, und deren Glieder im letzten Falle schließlich negativ und ihrem Betrage nach kleiner als 1 werden. — Für $c_1 = -1$ ist nach (13)

$$p_n = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{n-2}{n-1} = \frac{m-1}{n-1},$$

so daß Σp_n hier mit der divergenten harmonischen Reihe zusammenfällt.

Aus dem Verhalten der Teilsummen der Reihe Σp_n schließt man nach dem 4. und 5. Satze in Nr. 12 auf das der Teilsummen von $\Sigma g_n p_n$ und Σa_n, wodurch auch die noch übrigen Aussagen unseres Satzes ihre Bestätigung finden.

14. Verhalten der ganzen Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise im Falle, daß ihre Koeffizienten die in Nr. 13 erwähnte Bedingung erfüllen.

Satz.[1]) „Wenn die Koeffizienten a_n in der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

so beschaffen sind, daß der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ von einem bestimmten Werte von n an sich in eine Reihe nach positiven ganzen Potenzen von $1 : n$ entwickeln läßt:

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1 + \nu_1 i}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots, \tag{2}$$

so gehört die Reihe (1) zur dritten der S. 176 unterschiedenen Klassen von ganzen Potenzreihen und zwar hat ihr Konvergenzkreis den Radius 1. Auf dem Kreise selbst zeigt sie nachstehendes Verhalten.

I. II. Ist $\mu_1 \geqq 0$, so divergiert die Reihe (1) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 ist.

---

1) Weierstraß a. a. O. S. 185. — W. Wirtinger (Acta math. 26, S. 265) leitet den Satz aus dem Verhalten der harmonischen Reihe $\Sigma(1 : n^s)$ bei komplexem s (vgl. VIII. 16) her. — Vgl. auch Pringsheim, am zuletzt a. O. S. 9—18.

III. 1) Ist $0 > \mu_1 \geqq -1$, so konvergiert die Reihe (1) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 ist, ausgenommen $x = 1$. Diese Konvergenz ist mithin bedingt.

2) Ist $\mu_1 < -1$, so konvergiert die Reihe (1) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 ist, und zwar absolut."

Nach dem, was in Nr. 13 bemerkt ist, bedarf nur der Absatz III. 1) noch des Beweises. Er kann so geführt werden. Zunächst sagt uns der Satz III) in Nr. 13, daß die Reihe (1) im vorliegenden Falle für $x = 1$ divergiert, daß aber $\lim a_n = 0$ ist. Nach dem Satze 3, c) in Nr. 12 ist daher die Konvergenz der Reihe (1) für alle x vom absoluten Betrage 1 mit Ausschluß des Wertes 1 selbst nachgewiesen, wenn wir zeigen können, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^n (a_n - a_{n+1}) \tag{3}$$

absolut konvergiert. Um das Verhalten dieser Reihe zu untersuchen, betrachten wir den Quotienten

$$\frac{a_{n+k+1} - a_{n+k+2}}{a_{n+k} - a_{n+k+1}} = \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\left(\frac{a_{n+k+2}}{a_{n+k+1}} - 1\right) : \left(\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} - 1\right). \tag{4}$$

Es ist nach (2), wenn wir statt $\mu_1 + \nu_1 i$ c_1 schreiben, zufolge V, 7

$$\frac{a_{n+k+2}}{a_{n+k+1}} = 1 + \frac{c_1}{n+1} + \frac{c_2}{(n+1)^2} + \cdots = 1 + c_1\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \cdots\right)$$
$$+ c_2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \cdots\right) + \cdots = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2 - c_1}{n^2} + \cdots$$

Da c_1 jetzt nicht Null ist, so ergibt sich aus (4) nach V, 9

$$\frac{a_{n+k+1} - a_{n+k+2}}{a_{n+k} - a_{n+k+1}} = 1 + \frac{c_1 - 1}{n} + \cdots = 1 + \frac{(\mu_1 - 1) + \nu_1 i}{n} + \cdots$$

Da $\mu_1 - 1 < -1$ ist, so konvergiert die Reihe (3) nach dem Satze III) 2) in Nr. 13 und zwar absolut, womit der in Rede stehende Nachweis erbracht ist.

Wenn der Quotient $a_{n+k+1} : a_{n+k}$ die Entwicklung (4*) S. 278 zuläßt, so setze man wie a. a. O. $a_n = b_n c_0^n$ und hierauf $c_0 x = y$. Dadurch erhält man eine ganze Potenzreihe von y, deren Koeffizienten b_n die Bedingung (2) erfüllen.

Der vorstehende Satz legt die Vermutung nahe, daß, wenn die Potenzreihe (1) in allen Punkten ihres Konvergenzkreises R konvergiert, sie absolut konvergiere, d. i. daß

$$\mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 R + \mathsf{A}_2 R^2 + \cdots$$

konvergiere. A. Pringsheim hat jedoch nachgewiesen[1]), daß sie nicht

1) Pringsheim, Math. Annalen 25 (1885), S. 419. München Sitzungsber. 1900, S. 37.

stichhaltig sei, indem es Potenzreihen gibt, welche für alle Punkte des Konvergenzkreises bedingt konvergieren (s. Übung 13).

15. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ beim Übergange des x zu einem Randpunkte ihres Konvergenzbereiches, für welchen die Reihe konvergiert.

1. **Satz nach Abel.**[1]) „Konvergiert die reelle Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

für den von Null verschiedenen Wert $x = r$ wenigstens bei der dem Wachsen des Zeigers n entsprechenden Anordnung ihrer Glieder, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Werte von x im Intervalle (r', r) mit Einschluß der Grenzen, worin r' irgend einen Wert von entgegengesetztem Vorzeichen wie r bedeutet, jedoch absolut genommen kleiner als r."

Beweis. Setzt man

$$a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p} = \varrho_{n,p} \quad (p \geqq 1),$$

so gehört nach Voraussetzung zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ derart, daß $|\varrho_{n,p}| < \varepsilon$, wenn nur $n > \mu$ ist. Da nun

$$a_{n+1} r^{n+1} = \varrho_{n,1},\ a_{n+2} r^{n+2} = \varrho_{n,2} - \varrho_{n,1},\ \cdots a_{n+p} r^{n+p} = \varrho_{n,p} - \varrho_{n,p-1}$$

ist, so hat man

$$\sum_1^p{}_s a_{n+s} x^{n+s} = \varrho_{n,1} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} + \sum_2^p{}_s (\varrho_{n,s} - \varrho_{n,s-1}) \left(\frac{x}{r}\right)^{n+s}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_1^{p-1}{}_s \varrho_{n,s} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+s} + \varrho_{n,p} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+p}$$

und hieraus ergibt sich für $|x| < |r|$ beim Grenzübergange $\lim p = +\infty$

$$\sum_1^\infty{}_s a_{n+s} x^{n+s} = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_1^\infty{}_s \varrho_{n,s} \left(\frac{x}{r}\right)^{n+s}.$$

Schreibt man hier

$$|r| = R,\ |x| = \varrho,\ |r - x| = \sigma \tag{2}$$

und denkt sich $n > \mu$, so folgt daraus

$$\left| \sum_1^\infty{}_s a_{n+s} x^{n+s} \right| < \frac{\varepsilon\sigma}{R} \sum_1^\infty{}_s \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n+s} = \frac{\varepsilon\sigma}{R} \cdot \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{R}},$$

also wegen $0 \leqq \frac{\varrho}{R} < 1$

$$\left| \sum_1^\infty{}_s a_{n+s} x^{n+s} \right| < \frac{\varepsilon\sigma}{R - \varrho}. \tag{3}$$

1) Abel, Oeuvres par Sylow et Lie I, S. 223

Wenn $\frac{x}{r} \geqq 0$ ist, so ist nach (2) $\sigma = R - \varrho$, so daß die rechte Seite von (3) in ε übergeht; wenn dagegen $\frac{x}{r} < 0$ ist, so hat man, indem man noch $|r'| = R'$ setzt, $\varrho \leqq R'$, $\sigma = |r - x| = R + \varrho \leqq R + R'$ und mithin

$$\left| \sum_{1}^{\infty} a_{n+s} x^{n+s} \right| < \frac{R + R'}{R - R'} \varepsilon.$$

Ist nun ε' eine beliebig vorgelegte positive Zahl und nimmt man $\varepsilon = (R - R')\varepsilon' : (R + R')$, so ist für alle Werte x des Intervalles (r', r) die linke Seite von (3) kleiner als ε', wenn nur $n > \mu$, womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesem Satze folgt mit Rücksicht auf den Satz S. 84, daß die Summe $f(x)$ einer im Intervalle $(-R, R)$ konvergenten reellen Potenzreihe (1) nicht nur an jeder Stelle im Innern dieses Intervalles, sondern auch an der Stelle $x = R$ und ebenso an der Stelle $x = -R$ nach dem Innern des Intervalles hin stetig ist, falls nur die Reihe für $x = R$ bzw. $x = -R$ konvergiert.

Der vorstehende Satz läßt sich in der folgenden Weise auf komplexe Potenzreihen ausdehnen.[1])

2. **Satz.** „Es sei die Potenzreihe (1), deren Koeffizienten nunmehr im allgemeinen als komplex anzusehen sind, in einem bestimmten auf dem Umfange ihres Konvergenzkreises vom Radius R (Fig. 10*) gelegenen Punkte $x = r$ mindestens bei der dem Wachsen des Zeigers n entsprechenden Anordnung ihrer Glieder konvergent. Durch jeden innerhalb des Konvergenzkreises befindlichen Punkt x denke man sich von r aus eine Sehne gezogen, deren zweiter Endpunkt mit r_1 bezeichnet sei, so daß r_1 mit der Richtung rx zugleich sich ändert. Ist dann ω eine beliebig kleine positive Zahl kleiner als $2R$, so konvergiert die Reihe (1) gleichmäßig für alle Werte von x, wofür $|xr_1| \geqq \omega$ ist, mit Einschluß von $x = r$.[2]) Ihre Summe $f(x)$ hat daher nach III, 14 bei jedem Grenzübergange $\lim x = r$, bei dem

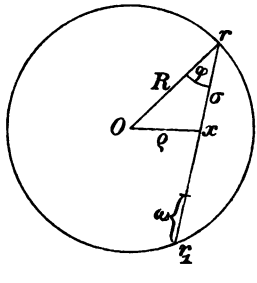


Fig. 10*.

1) Stolz, Schlömilchsche Zeitschrift 29 (1884), S. 127; ebenso Vorlesungen über allgem. Arithm. II, S. 157. Der dort gegebene Beweis liefert den Satz bereits in dem hier vorgeführten Umfange. — Als besonderer Fall desselben erscheint der folgende von A. Pringsheim, Sitz.-Berichte d. bayer. Ak. 27 (1897), S. 347 bewiesene Satz: „Die Reihe (1) konvergiert gleichmäßig in dem Dreiecke rx_0x_1, wo x_0, x_1 zwei beliebige innnerhalb des Konvergenzkreises befindliche Punkte bedeuten."

2) Die durch die Gleichung $|xr_1| = \omega$ definierte Begrenzung des Bereiches, in welchem die Reihe (1) gleichmäßig konvergiert, stellt sich geometrisch

sich x dem Werte r vom Innern des Kreises her nähert und $|xr_1|$ beständig über einer positiven Zahl bleibt, den Grenzwert $f(r)$."

Beweis. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen (2) gilt auch jetzt ebenso wie beim ersten Satze die Ungleichung (3) und zwar für jeden innerhalb des Konvergenzkreises gelegenen Punkt x; denn die nämlichen Schlüsse, die oben zu der genannten Ungleichung geführt haben, sind auch dann noch anwendbar, wenn die Größen a_n, r und x komplex sind. Bezeichnet man nun mit φ den spitzen Winkel $\widehat{Orx}$, so ist in dem Dreiecke Orx

$$\varrho^2 = R^2 + \sigma^2 - 2R\sigma\cos\varphi, \text{ also } \frac{\sigma}{R-\varrho} = \frac{R+\varrho}{2R\cos\varphi - \sigma}. \qquad (4)$$

Ferner hat man, da x innerhalb des Kreises liegt,

$$\sigma = |rx| = |rr_1 - xr_1| = |rr_1| - |xr_1|.$$

Es ist aber $|rr_1| = 2R\cos\varphi$ und gemäß der Voraussetzung $|xr_1| \geqq \omega$, somit

$$\sigma \leqq 2R\cos\varphi - \omega.$$

Demnach ergibt sich aus (4)

$$\frac{\sigma}{R-\varrho} \leqq \frac{R+\varrho}{\omega} < \frac{2R}{\omega}$$

und hierauf aus (3), falls $n > \mu$ ist,

$$\left| \sum_1^\infty a_{n+s} x^{n+s} \right| < \frac{2R\varepsilon}{\omega}.$$

In dieser Relation, die offenbar auch für $x = r$ besteht, ist die rechte Seite von der Lage des Punktes x unabhängig, sofern nur $|xr_1| \geqq \omega$ ist, und hierdurch ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (1) für die genannten Werte von x nachgewiesen.

Aus diesem Satze folgt der nachstehende, für den Fall reeller Reihen von Abel[1]) hergeleitete Satz über die Multiplikation zweier Reihen: „Konvergieren die Reihen Σa_n und Σb_n zu den Grenzwerten a bzw. b und konvergiert auch die Reihe Σd_n, worin

$$d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist, so ist $\Sigma d_n = ab$."

---

als innere Schleife einer durch den Punkt r gezogenen, dem Konvergenzkreise beliebig nahe kommenden Pascalschen Kreiskonchoide dar. — Insbesondere findet die gleichmäßige Konvergenz auch statt in jedem Bereiche, welcher aus einem zum Konvergenzkreise konzentrischen Kreise mit dem Radius $R' < R$ und außerdem aus jenem Flächenstücke besteht, das von dem letzteren Kreise einerseits und von den beiden vom Punkte r aus an denselben gelegten Tangenten andererseits begrenzt ist.

1) Abel, Oeuvres I. S. 226.

Denn es konvergieren die Potenzreihen

$$\Sigma a_n x^n = f(x),\ \Sigma b_n x^n = g(x),\ \Sigma d_n x^n = h(x)$$

absolut für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Hierfür ist also nach „Arithmetik" S. 389, Satz 7)

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Man kann hier die Veränderliche x auf reelle Werte beschränken und hat dann nach dem obigen Satze bei $\lim x = 1 - 0$

$$\lim f(x) = a,\ \lim g(x) = b \text{ und } \lim h(x) = \Sigma d_n,$$

also

$$\Sigma d_n = ab.$$

16. Verhalten der Summe einer ganzen Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ beim Übergange des x zu einem Randpunkte ihres Konvergenzbereiches, für welchen die Reihe divergiert.

Wir nehmen jetzt an, es sei die reelle Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ für den Wert $x = r$ mindestens bei der dem wachsenden n entsprechenden Anordnung ihrer Glieder divergent, dagegen konvergent für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als $|r| = R$ ist. Dann können wir zunächst bemerken, daß diese Konvergenz unmöglich für alle x im Intervalle (r', r), worin $-R < r' < R$ ist, mit Ausschluß der Grenze $x = r$ gleichmäßig sein kann. Denn wäre dies der Fall, so müßte die Reihe auch für $x = r$ konvergieren (S. 85).

Bezüglich des Verhaltens der Reihensumme

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n \tag{1}$$

bei unbegrenzter Annäherung des x an den Wert r bestehen die folgenden Sätze, in denen wir, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit geschehen darf, r als positiv voraussetzen.

1) „Hat die Summe

$$s_n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n$$

bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ $(-\infty)$, so hat $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ ebenfalls den Grenzwert $+\infty$ $(-\infty)$."

Beweis. Es sei $0 < x < r$ und

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = s_n(x).$$

Ist n größer als eine feste Zahl m, so folgt wegen $a_n r^n = s_n - s_{n-1}$

$$s_n(x) = s_m(x) + \sum_{m+1}^{n} (s_p - s_{p-1}) \left(\frac{x}{r}\right)^p$$

d. i.

$$s_n(x) = \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{m+1}^{n-1} s_p \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^p + s_n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n. \tag{2}$$

Wenn nun $\lim s_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$ ist, so kann m so groß gewählt werden, daß neben $n > m$ $s_n > G$ ist, wobei G irgend eine positive Zahl bedeutet. Demnach ist nach (2)

$$s_n(x) > \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left[\left(1 - \frac{x}{r}\right)\sum_{m+1}^{n-1}\left(\frac{x}{r}\right)^p + \left(\frac{x}{r}\right)^n\right],$$

also

$$s_n(x) > \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Hieraus folgt bei $\lim n = +\infty$

$$f(x) \geqq \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + G\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Da bei $\lim x = r - 0$

$$\lim \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} = 1, \lim \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] = 0$$

ist, so gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$, so daß neben $r - \delta < x < r$

$$1 - \varepsilon < \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} < 1 \text{ und } -\varepsilon < s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1} < \varepsilon \qquad (3)$$

ist. Man findet also für $r - \delta < x < r$

$$f(x) > G(1 - \varepsilon) - \varepsilon = G - \varepsilon(G + 1).$$

Wenn nun H eine gegebene positive Zahl bedeutet, so nehme man $G > H$ an, wodurch m bestimmt ist, und setze

$$\varepsilon = (G - H) : (G + 1),$$

worauf δ sich ergibt. Dann folgt für alle x, welche der Bedingung $r - \delta < x < r$ genügen, $f(x) > H$, d. i.

$$\lim_{x=r-0} f(x) = +\infty.$$

Der Fall $\lim s_n = -\infty$ wird auf den soeben behandelten zurückgeführt, indem man $-f(x)$ an Stelle von $f(x)$ betrachtet.

2) „Ist die obere (untere) Unbestimmtheitsgrenze von s_n bei $\lim n = +\infty$ eine endliche Zahl $O(U)$, so ist jene von $f(x)$ (wenn nicht $-\infty$ $(+\infty)$) eine Zahl, welche nicht größer (kleiner) als $O(U)$ ist.“[1])

Beweis. Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ die endliche obere Unbestimmtheitsgrenze O, so kann in der Formel (2) die Zahl m so gewählt werden, daß für $n > m$ $s_n < O + \varepsilon$ wird, wo ε irgend eine positive Zahl sein kann. Demnach folgt jetzt aus (2) für $n > m$ auf ähnliche Art wie oben

1) W. Veltmann, Schlömilchsche Zeitschrift 27 (1882), S. 196.

$$s_n(x) < \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}$$

und

$$f(x) \leqq \left[s_m(x) - s_m \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}\right] + (O + \varepsilon)\left(\frac{x}{r}\right)^{m+1}.$$

Daraus ergibt sich im Hinblick auf (3) für $r - \delta < x < r$, wenn $O \geqq 0$,

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon) = O + 2\varepsilon; \tag{4}$$

wenn $O < 0$ (und $\varepsilon < -O$),

$$f(x) < \varepsilon + (O + \varepsilon)(1 - \varepsilon) < O + \varepsilon(2 - O). \tag{5}$$

Demnach kann die obere Unbestimmtheitsgrenze von $f(x)$ bei $\lim x = r - 0$ nicht $+\infty$ sein, sondern dieselbe ist entweder eine endliche Zahl O' oder $-\infty$. Im ersteren Falle gibt es im Intervalle $(r - \delta, r)$ mindestens einen Wert x_1, wofür

$$f(x_1) > O' - \varepsilon$$

ist. Denkt man sich auch in (4) und (5) $x = x_1$ gesetzt, so findet man

$$O' - O < 3\varepsilon \text{ bezw. } \varepsilon(3 - O)$$

und da hier ε, also auch 3ε bezw. $\varepsilon(3 - O)$ jede noch so kleine positive Zahl sein kann, so folgt daraus $O' \leqq O$. — Der auf die untere Unbestimmtheitsgrenze bezügliche Teil des Satzes ergibt sich wieder, indem man das Vorstehende auf $-f(x)$ anwendet.

3) „Hat s_n bei $\lim n = +\infty$ endliche und voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen O, U, so konvergiert die Reihe (1) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als r ist, absolut und ihre Summe $f(x)$ hat bei $\lim x = r - 0$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen O', U', für welche

$$U \leqq U' \leqq O' \leqq O$$

ist.“[1])

Beweis. Da nunmehr alle s_n dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Zahl g liegen, so konvergiert die Potenzreihe

$$s_0 + s_1 \cdot \frac{x}{r} + s_2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots + s_n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n + \cdots$$

nach dem Satze 1) S. 175 absolut für $|x| < r$. Dieselbe Eigenschaft besitzt daher auch die Reihe

$$s_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{r}\right) + s_1 \cdot \left(1 - \frac{x}{r}\right) \cdot \frac{x}{r} + \cdots + s_n \cdot \left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^n + \cdots$$

Daraus folgt aber, da für $|x| < r$

$$\lim_{n = +\infty} s_n \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n = 0$$

1) O. Hölder, Math. Annalen 20 (1882) S. 536.

ist, die Konvergenz der Reihe

$$s_0 + (s_1 - s_0)\frac{x}{r} + (s_2 - s_1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots,$$

welche mit (1) übereinstimmt.

Denkt man sich zu der Ungleichung (4) bzw. (5) die entsprechende für die untere Unbestimmtheitsgrenze angeschrieben, so erkennt man, daß zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\delta' > 0$ derart gehört, daß neben $r - \delta' < x < r$

$$U - \varepsilon' < f(x) < O + \varepsilon'$$

ist. Daraus folgt, daß die beiden Unbestimmtheitsgrenzen O' und U' von $f(x)$ endlich sind, und man hat daher nach dem zweiten Satze $O' \leqq O$ und $U' \geqq U$. Daß $O' = U'$ sei, ist dabei nicht ausgeschlossen. In der Tat ist für die geometrische Reihe

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$r = 1,\ O = 1,\ U = 0,\ O' = U' = \tfrac{1}{2}.$$

Ist eine komplexe Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{6}$$

vorgelegt, welche im Punkte $x = r$ ihres Konvergenzkreises vom Radius R bei der angegebenen Anordnung der Glieder divergiert, so läßt sich das Verhalten von $f(x)$, während x auf dem Radius Or dem Punkte r sich unbeschränkt nähert, mit Hilfe der Sätze 1) — 3) beurteilen. Setzt man in (6)

$$x = \varrho r,\ a_n r^n = \gamma_n + i\delta_n,$$

so erhält man

$$f(x) = \varphi(\varrho) + i\,\psi(\varrho),$$

worin $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ ganze Potenzreihen von ϱ mit reellen Koeffizienten bedeuten. Läßt man nun die reelle positive Zahl ϱ den Grenzübergang $\lim \varrho = 1 - 0$ ausführen, so kann man folgendes bemerken:

a) „Wenn die Summe

$$s_n = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n$$

bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert ∞ hat, so hat $f(\varrho r)$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$ ebenfalls den Grenzwert ∞." — Denn von den Ausdrücken

$$\sigma_n = \sum_0^n{}^{\lambda} \gamma_\lambda,\ \tau_n = \sum_0^n{}^{\lambda} \delta_\lambda$$

muß mindestens einer bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ haben (vgl. III, 7) und den nämlichen Grenzwert hat daher nach dem Satze 1) auch die entsprechende der Funktionen $\varphi(\varrho)$, $\psi(\varrho)$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$.

b) „Hat $|s_n|$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze A, so konvergiert die Potenzreihe (6) absolut für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als $|r|$ ist, und es hat $|f(\varrho r)|$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$ eine endliche obere Unbestimmtheitsgrenze $A' \leqq A\sqrt{2}$."

Denn zufolge der Formel

$$|s_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

muß, wie klein auch die positive Zahl ε sein mag, bei hinlänglich großen Werten von n sowohl $|\sigma_n|$ als auch $|\tau_n|$ unter $A + \varepsilon$ liegen, beide haben somit bei $\lim n = +\infty$ endliche obere Unbestimmtheitsgrenzen nicht größer als A. Demgemäß konvergieren nach dem Satze 3) die Reihen $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ unbedingt für die Werte $\varrho < 1$ und daher konvergiert $f(x)$ absolut für alle Werte von x, wofür $|x| < |r|$ ist. Dabei sind die oberen Unbestimmtheitsgrenzen von $|\varphi(\varrho)|$ und $|\psi(\varrho)|$ bei $\lim \varrho = 1 - 0$ endlich und nicht größer als A, somit ist jene von $|f(\varrho r)|$ nicht größer als $A\sqrt{2}$.

Einen weiteren Satz dieser Art enthält die Übung 14).

Übungen zum VI. Abschnitt.

1) „Wenn die unendliche Reihe mit positiven Gliedern Σa_n divergiert, so divergieren auch die beiden Reihen

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{a_n}{s_{n-1}} \text{ und } \sum_0^\infty{}_n \frac{a_n}{s_n},$$

worin $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ist." (Die erstere nach Abel, Journal f. Math. 3 (1828), S. 81, die letztere nach Dini, »Sulle serie a termini positivi« S. 8.) — Der Beweis kann ähnlich geführt werden, wie die Divergenz der Reihe (8) S. 248 gezeigt wurde.

2) „Jede divergente unendliche Reihe, deren Glieder sämtlich positiv und dabei kleiner als 1 sind, läßt sich in der Gestalt

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1}} \qquad (\alpha)$$

darstellen, worin μ_n die in VI, 3 erklärte Bedeutung hat. Umgekehrt divergiert jede Reihe von der Form (α)." (Pringsheim, Math. Annalen 35, S. 322.) — Bezüglich der ersten Behauptung vergleiche den Beweis des 2. Teiles des Satzes 1. in VI, 3; die Richtigkeit der zweiten folgt aus 1), indem man dort $a_n = \mu_{n+1} - \mu_n$ setzt.

3) „In der Reihe $A \equiv \sum_0^\infty{}_n a_n$ sei

$$a_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_n \mu_{n+1}},$$

wobei die μ_n dasselbe bedeuten wie in 2), und der Quotient $\mu_{n+1} : \mu_n = q_n$ habe bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ oder mindestens die obere Unbestimmtheitsgrenze $+\infty$. Es sei ferner p eine feste positive Zahl größer als 1 und wir definieren die Größen q_n' so: Es soll, falls $q_n \leqq p$ ist, $q_n' = q_n$, und falls $q_n > p$ ist, $q_n' = p$ sein. Setzt man dann

$$\mu_0' = \mu_0, \quad \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n'} = q_n', \quad a_n' = \frac{\mu_{n+1}' - \mu_n'}{\mu_n' \mu_{n+1}'} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

und $A' \equiv \sum_0^\infty a_n'$, so konvergiert jede der beiden Reihen A und A' und man hat

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_n'} = 0. \tag{β}$$

Die Reihe A konvergiert demnach stärker als die Reihe A'." (Nach Pringsheim a. a. O.)

Anleitung. Man hat

$$\mu_n = \mu_0 q_0 q_1 \cdots q_{n-1}, \quad \mu_n' = \mu_0 q_0' q_1' \cdots q_{n-1}' \tag{γ}$$

und mit Hilfe der letzteren Gleichung findet man, daß μ_n' ebenso wie μ_n eine monotone Funktion erster Art von n ist. Nach VI, 3 konvergiert daher sowohl die Reihe A als auch die Reihe A'. Weiter ergibt sich aus (γ)

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\mu_n'}{\mu_n} = 0. \tag{δ}$$

Da ferner

$$a_n = \frac{q_n - 1}{q_n \mu_n}, \quad a_n' = \frac{q_n' - 1}{q_n' \mu_n},$$

also

$$\frac{a_n}{a_n'} = \frac{q_n - 1}{q_n' - 1} \cdot \frac{q_n'}{q_n} \cdot \frac{\mu_n'}{\mu_n}$$

ist, so folgt aus der Definition der Größen q_n'

$$\frac{a_n}{a_n'} = \frac{\mu_n'}{\mu_n} \text{ oder aber } \frac{a_n}{a_n'} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{\mu_n'}{\mu_n},$$

je nachdem $q_n \leqq p$ oder $q_n > p$ ist, wonach man mit Hilfe von (δ) die Beziehung (β) gewinnt.

4) Die Art der Annäherung von $L_s(n) : L_s(n+1)$ bei unbegrenzt wachsendem n an den Grenzwert 1 kann noch genauer angegeben werden, als es durch die Formel (16) in VI, 4 geschehen ist. „Setzt man nämlich

$$P_s(n) = \frac{1}{n} + \frac{M}{L_1(n)} + \frac{M^2}{L_2(n)} + \cdots + \frac{M^s}{L_s(n)} \qquad (s \geqq 0),$$

so ist

$$\frac{L_s(n)}{L_s(n+1)} = 1 - P_s(n) + \frac{w_s(n)}{n^2}, \tag{ε}$$

worin $w_s(n)$ eine Funktion von n bedeutet, welche bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert 1 hat." (Stolz, Vorlesungen über allgem. Arithm. I, S. 264.) — Mit Hilfe der logarithmischen Reihe („Arithmetik" S. 267) ergibt sich nämlich für $|x| < 1$

$$\log(1+x) = Mx\left(1 - \frac{x\,v(x)}{2}\right) \quad [\lim_{x=0} v(x) = 1] \qquad (\zeta)$$

und hieraus

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{M}{n}\left(1 - \frac{v_1(n)}{2n}\right) \quad [\lim_{n=+\infty} v_1(n) = 1],$$

also

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{M}{L_1(n)}\left\{1 - \frac{v_1(n)}{2n}\right\}.$$

Allgemein findet man mittels der Formel (ζ) unter Anwendung des Schlusses von r auf $r+1$

$$\frac{\log_r(n+1)}{\log_r n} = 1 + \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{v_r(n)}{2n}\right\} \quad [\lim_{n=+\infty} v_r(n) = 1],$$

woraus sich dann

$$\frac{\log_r n}{\log_r(n+1)} = 1 - \frac{M^r}{L_r(n)}\left\{1 - \frac{u_r(n)}{2n}\right\} \quad [\lim_{n=+\infty} u_r(n) = 1]$$

ergibt. Denkt man sich diese Gleichung für $r = 1, 2, \ldots s$ angeschrieben, setzt dazu noch

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{u_0(n)}{n^2} \quad \left[u_0(n) = \frac{n}{n+1}\right]$$

und multipliziert die so erhaltenen Gleichungen miteinander, so gelangt man schließlich zu der Formel (ε).

5) S. S. 237 Übung 1).

Mit Hilfe der gewöhnlichen logarithmischen Kriterien (6) in VI, 5 und (10) in VI, 6 lassen sich leicht noch die folgenden disjunktiven Kriterien erster Art 6) und 7) bestätigen:

6) „Die unendliche Reihe mit positiven Gliedern Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem $\lim_{n=+\infty} \dfrac{\log \frac{1}{a_{n+k}}}{\log n} > 1$ oder < 1." (Cauchy, Cours d'Analyse S. 137.)

7) „Die unendliche Reihe mit positiven Gliedern Σa_n konvergiert oder divergiert, je nachdem

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\log \frac{1}{L_{r-2}(n)\,a_{n+k}}}{\log_r n} > 1 \text{ oder } < 1,$$

worin r eine der Zahlen 2, 3, 4, ... bedeutet." (Bertrand, Journal de Math. 7, S. 37.)

8) „Wenn die unendliche Reihe mit positiven Gliedern Σa_n divergiert und die a_n sämtlich unter einer festen positiven Zahl liegen, so divergiert oder konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{s_n^\lambda},$$

worin

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

gesetzt ist, je nachdem $\lambda \leqq 1$ oder aber $\lambda > 1$ ist." (Dini a. a. O.) — Die Divergenz im Falle $\lambda < 1$ ergibt sich aus 1); für den Fall $\lambda > 1$ wende man das Kriterium (4) in VI, 6 in sinngemäßer Weise an.

9) „Es sei die unendliche Reihe mit positiven Gliedern Σa_n divergent und wir setzen

$$s_n = \sum_0^n a_r,\quad s_n' = \sum_0^n \frac{a_r}{s_r},\quad s_n'' = \sum_0^n \frac{a_r}{s_r s_r'}$$

und allgemein

$$s_n^{(m)} = \sum_0^n \frac{a_r}{s_r s_r' s_r'' \cdots s_r^{(m-1)}} \qquad (m > 1).$$

Unter dieser Voraussetzung divergiert oder konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{s_n s_n' s_n'' \cdots s_n^{(m-1)} \left(s_n^{(m)}\right)^\lambda} \qquad (m \geqq 1),$$

je nachdem $\lambda \leqq 1$ oder aber $\lambda > 1$ ist." (Dini a. a. O. S. 9.) — Dieser Satz folgt aus 1) und 8).

10) „Wenn in der unendlichen Reihe mit positiven Gliedern Σa_n

$$\lim_{n=+\infty} (a_{n+1} : a_n) = 1$$

ist und die monotone Funktion erster Art μ_n so gewählt wird, daß

$$\lim_{n=+\infty} \frac{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 1$$

ist, so konvergiert oder divergiert die Reihe, je nachdem

$$\overline{\lim} \; \mu_n \left(\frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n} - \frac{1}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \right) > 1 \text{ oder } < 1$$

und ebenso, je nachdem für einen Wert $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\overline{\lim} \left\{ \frac{L_{r-1}(\mu_n)}{\mu_{n+1} - \mu_n} - \frac{L_{r-1}(\mu_{n+1})}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} \right\} \log_r \mu_n > M^r \text{ oder } < M^r$$

ist, wobei M den Modul des Logarithmensystems bedeutet." — Diese Kriterien ergeben sich aus den Kriterien (16) in VI, 8 auf analoge Weise, wie die dem Falle $\mu_n = n$ entsprechenden in VI, 9 aus den Kriterien (18) in VI, 8 hergeleitet wurden.

11) a) „Sind $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ reelle oder komplexe Zahlen von der Beschaffenheit, daß $\lim b_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$ ist und daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^n |b_n - b_{n+1}|$$

konvergiert, und bedeutet ϑ einen beliebigen Winkel, so konvergieren die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty{}^n b_n \sin n\vartheta \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty{}^n b_n \cos n\vartheta$$

und zwar die erstere für jeden Wert von ϑ, die letztere sicher dann, wenn ϑ nicht Null oder ein Vielfaches von $\pm 2\pi$ ist; sie konvergiert jedoch auch noch für die letztgenannten Werte von ϑ, wenn die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^n b_n$$

konvergiert."

Anleitung. Man wende den Satz 3, c) in VI, 12 an, wobei $x = e^{\vartheta i}$ zu setzen ist, und beachte, daß

$$e^{\vartheta i} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

ist.

b) Unter den nämlichen Umständen konvergiert die Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^n b_n x^n$ gleichmäßig für alle Punkte innerhalb und auf dem Einheitskreise, deren Abstand vom Punkte $+1$ über einer gegebenen positiven Zahl liegt. — Anleitung. Man multipliziere den Rest $\sum_{n+1}^\infty{}^r b_r x^r$ mit $1 - x$.

12) „Die Reihe

$$A \equiv 1 + \sum_2^\infty{}^n (-1)^{\lambda_n} \cdot \frac{1}{n \log n},$$

worin $\lambda_n = 0$, falls $2^{2k} \leqq n < 2^{2k+1}$, dagegen $\lambda_n = 1$ ist, falls $2^{2k+1} \leqq n < 2^{2k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ist, konvergiert. Setzt man

$$b_n = (-1)^{\lambda_n} \cdot \frac{1}{n \log n} \qquad (n \geqq 2),$$

so ist $\lim b_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$ und es konvergiert auch die Reihe

$$B \equiv \sum_2^\infty{}^n |b_n - b_{n+1}| \cdot "$$

(Pringsheim, Math. Annalen 25 (1885), S. 419.)

Beweis. Der Reihe A kann man die Gestalt geben

$$A \equiv 1 + \sum_1^\infty{}^r (-1)^r \sum_0^{p_r}{}^s \frac{1}{(2^r+s)\log(2^r+s)} \qquad (p_r = 2^r - 1).$$

Setzt man

$$c_r = \sum_0^{p_r}{}^s \frac{1}{(2^r+s)\log(2^r+s)},$$

so hat man

$$c_{r+1} = \sum_0^{p_{r+1}}{}^s \frac{1}{(2^{r+1}+s)\log(2^{r+1}+s)} < 2\sum_0^{p_r}{}^s \frac{1}{(2^{r+1}+2s)\log(2^{r+1}+2s)},$$

also

$$c_{r+1} < \sum_0^{p_r}{}^s \frac{1}{(2^r+s)\log(2^r+s)}, \text{ d. i. } c_{r+1} < c_r.$$

Ferner ist

$$c_r < \frac{2^r}{2^r\log(2^r)} = \frac{1}{r\log 2}, \text{ mithin } \lim_{r=+\infty} c_r = 0.$$

Demnach konvergiert die alternierende Reihe

$$1 + \sum_1^\infty{}^r (-1)^r c_r$$

und ebenso die Reihe A. Endlich hat man noch

$$B \equiv \sum_2^\infty{}^n \left\{\frac{1}{n\log n} - \frac{(-1)^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{(n+1)\log(n+1)}\right\} =$$

$$= \sum_2^\infty{}^n \left\{\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right\} + \sum_2^\infty{}^n \frac{1-(-1)^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Hierbei ist

$$\sum_2^\infty{}^n \left\{\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}\right\} = \frac{1}{2\log 2}$$

und

$$\sum_2^\infty{}^n \frac{1-(-1)^{\lambda_{n+1}-\lambda_n}}{(n+1)\log(n+1)} = 2\sum_1^\infty{}^k \frac{1}{2^k\log(2^k)} = \frac{2}{\log 2}\sum_1^\infty{}^k \frac{(\frac{1}{2})^k}{k} = 2\cdot l10,$$

somit

$$B = \frac{1}{2\log 2} + 2\cdot l10.$$

13) „Die Potenzreihe

$$x + \sum_2^\infty{}^n (-1)^{\lambda_n}\cdot\frac{x^n}{n\log n},$$

worin λ_n dasselbe wie in 12) bedeutet, hat, wenn man x auch komplexe Werte annehmen läßt, den Konvergenzradius 1; die Reihe konvergiert für alle x vom Betrage 1, jedoch für jeden derselben nur bedingt, nicht absolut." (Pringsheim a. a. O. S. 24.) — Dies ergibt sich aus 12) mit Hilfe von 11).

14) „Die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

deren Koeffizienten reell oder komplex sein können, habe die folgende Eigenschaft: Setzt man, unter r eine bestimmte, von Null verschiedene Zahl verstehend,

$$s_n = a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n, \; t_n = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

so habe s_n bei $\lim n = +\infty$ keinen Grenzwert, dagegen sei

$$\lim_{n=+\infty} \frac{t_n}{n} = b \tag{2}$$

eine bestimmte endliche Zahl. Unter dieser Voraussetzung hat die Reihe (1) den Konvergenzradius $R = |r|$. Bezeichnet man ihre Summe mit $f(x)$ und bedeutet ϱ eine positive Veränderliche, so ist

$$\lim_{\varrho=1-0} f(\varrho r) = b." \tag{3}$$

(Nach G. Frobenius, Journal f. Math. 89 (1880), S. 262.)

Anleitung. Es konvergieren für $|y| < 1$ die Reihen

$$\sum_1^\infty{}^n \frac{t_n}{n} y^n, \quad \sum_1^\infty{}^n t_n y^{n-1}, \quad \sum_0^\infty{}^n t_n y^n$$

und hieraus folgt die Konvergenz von

$$\sum_0^\infty{}^n t_n(1-y)y^n = \sum_0^\infty{}^n s_n y^n \text{ und } \sum_0^\infty{}^n s_n(1-y)y^n = \sum_0^\infty{}^n a_n r^n y^n. \tag{4}$$

Somit konvergiert die Reihe (1) für $|x| < R$. Zufolge (4) ist

$$f(\varrho r) = (1-\varrho)^2 \sum_0^\infty{}^n t_n \varrho^n.$$

Um nun die Beziehung (3) nachzuweisen, kann man sich zunächst auf den Fall beschränken, daß sowohl r als auch die Koeffizienten a_n reell sind, wobei man noch $b \geqq 0$ annehmen darf. Setzt man

$$\sum_0^n{}^\lambda t_\lambda \varrho^\lambda = \varphi_n(\varrho), \; R_n(\varrho) = \sum_{n+1}^\infty{}^\lambda t_\lambda \varrho^\lambda,$$

so ist

$$f(\varrho r) = (1-\varrho)^2 \varphi_n(\varrho) + (1-\varrho)^2 R_n(\varrho) \quad (\varrho < 1). \tag{5}$$

Zufolge (2) gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m derart daß neben $n > m$

$$b - \varepsilon < \frac{t_n}{n} < b + \varepsilon.$$

Man hat daher für $n \geqq m$

$$(b-\varepsilon) \cdot \sum_{n+1}^{\infty \lambda} \lambda \varrho^\lambda < R_n(\varrho) < (b+\varepsilon) \cdot \sum_{n+1}^{\infty \lambda} \lambda \varrho^\lambda.$$

Setzt man noch

$$\sum_{1}^{n \lambda} \lambda \varrho^\lambda = \psi_n(\varrho),$$

so hat man

$$\sum_{n+1}^{\infty \lambda} \lambda \varrho^\lambda = \sum_{1}^{\infty \lambda} \lambda \varrho^\lambda - \psi_n(\varrho) = \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2} - \psi_n(\varrho)$$

und mithin wegen $0 < \varrho < 1$ und $\psi_n(\varrho) > 0$

$$(b-\varepsilon)\,\{\varrho - (1-\varrho)^2 \psi_n(\varrho)\} < (1-\varrho)^2 R_n(\varrho) < b + \varepsilon.$$

Demnach ergibt sich aus (5)

$$(b-\varepsilon)\,\{\varrho - (1-\varrho)^2 \psi_n(\varrho)\} < f(\varrho r) - (1-\varrho)^2 \varphi_n(\varrho) < b + \varepsilon$$

und hieraus wird man leicht die Relation (3) gewinnen, wenn man noch beachtet, daß

$$|\varphi_n(\varrho)| < \sum_{0}^{n \lambda} |t_\lambda| \text{ und } 0 < \psi_n(\varrho) < \frac{n(n+1)}{2}$$

ist. Die weitere Ausführung sei dem Leser überlassen. — Der Fall $b < 0$ wird auf den soeben betrachteten zurückgeführt, indem man das Vorstehende auf die Reihe $-\Sigma a_n x^n$ anwendet. Falls die a_n oder r oder auch beide komplex sind, denke man sich die Größen $a_n r^n$, s_n, t_n und b in ihre reellen und imaginären Bestandteile zerlegt. Man erkennt dann sofort, daß der Satz auch jetzt noch seine Gültigkeit hat.

Ein Beispiel für die Anwendung des vorstehenden Satzes bietet die geometrische Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ dar, wobei man $r = 1$ zu nehmen hat.

15) Welches Verhalten zeigt die in der Übung 2) S. 237 angeführte Gauß'sche Reihe hinsichtlich Konvergenz oder Divergenz auf ihrem Konvergenzkreise vom Radius 1? — Dieselbe Frage ist zu beantworten bezüglich der hypergeometrischen Reihe $(m+1)$ter Ordnung (Gegenbauer, Archiv f. Math. 55, S. 284):

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{a_0(a_0+1)\cdots(a_0+n-1)}{1\cdot 2\cdots n} \cdot \frac{a_1(a_1+1)\cdots(a_1+n-1)}{b_1(b_1+1)\cdots(b_1+n-1)} \cdots$$

$$\cdots \frac{a_m(a_m+1)\cdots(a_m+n-1)}{b_m(b_m+1)\cdots(b_m+n-1)} x^n,$$

worin die a, b beliebige Zahlen sein können; nur dürfen die letzteren weder 0 noch negative ganze Zahlen sein. — Diese Fragen sind mittels des Satzes S. 284 zu entscheiden, indem man den Quotienten $c_n : c_{n-1}$ (unter c_n den Koeffizienten von x^n in den genannten ganzen Potenzreihen verstanden) in eine ganze Potenzreihe von $1 : n$ entwickelt.

VII. Abschnitt.

Begriff der monogenen analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen nach Weierstraß.

1. Die ganze Potenzreihe als Funktionselement.

Weierstraß[1]) erklärt die monogenen analytischen Funktionen mit Hilfe der konvergenten ganzen Potenzreihen, sei es von $x - a$ (unter a irgend eine feste komplexe Zahl verstanden) oder von $1 : x$. Eine solche Reihe wird von ihm typisch mit $\mathfrak{P}(x \mid a)$ bezeichnet, wobei $x \mid a$, falls a eine komplexe Zahl ist, den Unterschied $x - a$, $x \mid \infty$ aber $1 : x$ bedeutet (vgl. S. 174).

Eine jede konvergente ganze Potenzreihe hat zum mindesten in allen Punkten innerhalb ihres Konvergenzbereiches eine Summe, sie führt also zu einer für diese Punkte eindeutigen Funktion. Wir wissen aus V. 8, daß wenn x' einen von ihnen bedeutet, die gegebene ganze Potenzreihe in eine solche von $x - x'$ umgewandelt werden kann, welche die zu ihm gehörige abgeleitete Potenzreihe heißt.

Ist eine beständig konvergente ganze Potenzreihe von $x - a$ vorgelegt, so ist auch die für irgend einen Punkt x' der Ebene daraus abgeleitete beständig konvergent. Beide Reihen, die ursprüngliche und die abgeleitete, haben in jedem Punkte x der Ebene die nämliche Summe. Wir sagen daher, durch eine beständig konvergente Potenzreihe von $x - a$ wird unmittelbar eine für alle Punkte der x-Ebene außer $x = \infty$ eindeutige monogene analytische Funktion

---

1) Weierstraß selbst berührt den von ihm aufgestellten Begriff der monogenen Funktion in seinen Schriften nur gelegentlich, vgl. Werke I. S. 83, 155, II. S. 201, IV. S. 13, 241.

Der größte Teil dieses Abschnittes ist nach seinen Vorlesungen über Funktionentheorie im S.-Sem. 1870 bearbeitet. Man vgl. auch S. Pincherle, Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii di Prof. W. im XVIII. Bd. (1880) v. Battaglini Giorn. p. 353 f.; O. Biermann, Theorie der analyt. Funktionen (1887) S. 169 f.

Ähnliche Gedanken, wie Weierstraß, hat Ch. Méray seit 1868 entwickelt, doch eine allgemeine Definition der monogenen Funktionen gibt er nicht. Vgl. dessen Leçons nouv. sur l'analyse infinitésimale etc. 4 Bände 1895—98.

von x erklärt. Ähnliches gilt von jeder beständig konvergenten Potenzreihe von $1 : x$; nur ist nunmehr die bezügliche Funktion für $x = \infty$ erklärt, für $x = 0$ nicht.

Hat die vorgelegte Potenzreihe einen eigentlichen Konvergenzkreis, so besitzt auch die daraus für einen Punkt x' innerhalb desselben abgeleitete Reihe einen solchen, und zwar reicht er mindestens bis an den ersteren heran (S. 188). Er kann aber auch, wie wir dies S. 190 an der geometrischen Reihe nachgewiesen haben, über den ursprünglichen Kreis hinausragen. Alsdann haben beide Reihen mindestens in jenen Punkten, welche innerhalb der beiden Kreise liegen, die nämliche Summe (V. 8, 12). Jenen Punkten, welche außerhalb des Konvergenzkreises der gegebenen Potenzreihe und innerhalb desjenigen der abgeleiteten Reihe liegen, wird also vermittels der letzteren je ein Wert zugeordnet: es läßt sich mithin die als Summe der vorgelegten Potenzreihe erklärte Funktion über ihren Konvergenzkreis fortsetzen. In diesem Sinne kann diese Potenzreihe als Element einer monogenen analytischen Funktion bezeichnet werden. Nur ist, um den Begriff einer solchen Funktion vollständig zu entwickeln, noch festzustellen, ob jede aus der vorgelegten unmittelbar oder mittelbar (Nr. 4) abgeleitete ganze Potenzreihe zu den nämlichen Werten für diejenigen Punkte, bis zu welcher sie überhaupt fortsetzbar ist, führt, wie die vorgelegte Potenzreihe selbst. Die Bemerkung über die geometrische Reihe $1 + x + x^2 + \cdots$ (S. 190) zeigt, daß man in der Tat die Funktion $1 : (1 - x)$ durch diese Reihe erzeugen kann.

Übrigens kann es auch vorkommen, daß unter den Reihen, welche sich aus der gegebenen Potenzreihe für die Punkte x' innerhalb ihres Konvergenzkreises ableiten lassen, keine sich befindet, deren Konvergenzkreis über diesen Kreis hinausragt. Dann bildet dieser Kreis den vollständigen Bereich, wofür die durch die vorgelegte Potenzreihe erzeugte Funktion erklärt ist.[1])

2. Weitere Sätze über die aus einer ganzen Potenzreihe von $x - a$ abgeleiteten Potenzreihen.

Die nachstehenden Sätze schließen sich unmittelbar an die in V, 8 gegebene Entwicklung an.

---

1) Als Beispiel einer über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbaren Potenzreihe führt Weierstraß (Werke II. S. 223) an die Potenzreihe

$$\sum_0^\infty {}_r \beta^n x^{a^n}$$

worin a eine ungerade natürliche Zahl, β eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet und $a\beta > 1 + 3\pi : 2$ zu denken ist. — Hinsichtlich anderer nicht fortsetzbarer Potenzreihen vgl. G. Faber in den Münchner Berichten 1904, S. 63.

1. Satz.[1]) Aus einer ganzen Potenzreihe von $x-a$, $\mathfrak{P}(x-a)$, mit dem Konvergenzkreise vom Radius R, deren Summe $f(x)$ sei, läßt sich für einen beliebigen Punkt x_0 innerhalb dieses Kreises eine ganze Potenzreihe von $x-x_0$, $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, ableiten, die in allen Punkten, welche innerhalb des Kreises (a, R) und ihres Konvergenzkreises liegen, die Summe $f(x)$ hat. Ist nun x_1 einer von diesen Punkten, so kann man für ihn aus der gegebenen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ eine neue $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ ableiten. Liegt nun der Punkt x_0 innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, so läßt sich dafür auch aus dieser Reihe eine ganze Potenzreihe von $x-x_0$, $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ ableiten. Sie ist aber mit der Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ identisch."

Die Konvergenzkreise der Reihen $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ und $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ haben eine Fläche $\mathfrak{M}$ gemein, wozu der Punkt x_0 und eine gewisse Kreisfläche um denselben gehört. Bedeutet x'' einen Punkt innerhalb derselben, so ist $\mathfrak{P}_0(x''-x_0)=f(x'')$. Andererseits hat man $\overline{\mathfrak{P}}_0(x''-x_0)=\mathfrak{P}_1(x''-x_1)=f(x'')$. Somit ist für x_0 und für alle Punkte x'' in einem gewissen Umkreise von x_0

$$\mathfrak{P}_0(x''-x_0)=\overline{\mathfrak{P}}_0(x''-x_0);$$

daher sind die beiden Potenzreihen von $x-x_0$, $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ und $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ identisch (V. 5).

2. Satz.[2]) „Ist der Abstand $|ax_0|$ kleiner als $R/2$, so gewinnt man aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ durch das in V. 8 beschriebene Verfahren der Ableitung für den Punkt a wieder die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$. Ist aber $|ax_0|\geqq R/2$, so kann man auf der Strecke x_0a zwischen x_0 und a eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \cdots a_m$ so einschalten, daß wenn für sie aus $\mathfrak{P}(x-a)$ nach dem genannten Verfahren die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x-a_1),\ \mathfrak{P}_2(x-a_2)\cdots\mathfrak{P}_m(x-a_m) \qquad (a)$$

erhalten werden, aus der Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ für den Punkt a_1 durch ebendasselbe Verfahren die Reihe $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$, aus dieser für a_2 auf die nämliche Weise die Reihe $\mathfrak{P}_2(x-a_2)\cdots$ und endlich aus $\mathfrak{P}_m(x-a_m)$ für den Punkt a als abgeleitete Reihe die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ erzielt wird."

Man kann also von der Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ durch das Verfahren der Ableitung entweder unmittelbar oder durch Vermittelung einer endlichen Anzahl von Punkten der Strecke x_0a auf die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ zurückkommen.

---

1) Biermann a. a. O. S. 163. Dieser Satz gilt auch von einer ganzen Potenzreihe von $1:x$. Nur tritt dann an Stelle der Kreisfläche (a, R) der Bereich welcher von den Außenpunkten des vom Nullpunkte mit dem Radius R beschriebenen Kreises gebildet wird, vgl. V, 11.

2) Vgl. Pincherle a. a. O. S. 348, T. XI. — Biermann a. a. O. S. 163.

Beweis. In Fig. 11 sei $|ax_1| = R$ und $|ax_0| < R/2$. Bedeutet x' einen Punkt innerhalb des Kreises $(x_0, |x_0x_1|)$, so ist

$$f(x') = \mathfrak{P}(x' - a) = \mathfrak{P}_0(x' - x_0).$$

Zu den Punkten x' gehören hier die Punkte x'' innerhalb des von a mit dem Radius $|ax_2|$ beschriebenen Kreises. Daher ist

$$\mathfrak{P}(x'' - a) = \mathfrak{P}_0(x'' - x_0).$$

Andererseits ist nach V, 8

$$\mathfrak{P}_0(x'' - x_0) = \overline{\mathfrak{P}}(x'' - a),$$

demnach erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{P}(x'' - a) = \overline{\mathfrak{P}}(x' - a).$$

Somit sind die beiden Potenzreihen von $x - a$, $\mathfrak{P}(x - a)$ und $\overline{\mathfrak{P}}(x - a)$ identisch (V, 5).

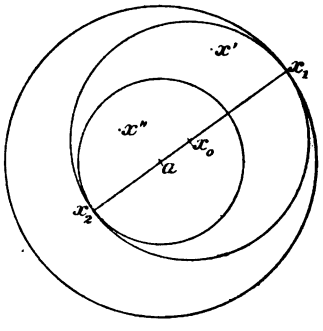


Fig 11.

Ist in Figur 12 $|ax_1| = R$ und $|ax_0| \geqq R/2$, so nehme man nach Belieben eine positive Zahl ϱ kleiner als $|x_0x_1|$ an und konstruiere auf x_0a der Reihe nach die Punkte $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ so, daß $|x_0a_1| = \varrho$, $|a_1a_2| = 2\varrho$, $|a_2a_3| = 4\varrho, \cdots |a_{n-1}a_n| = 2^{n-1}\varrho$ ist. Mithin hat man $|x_0a_1| = \varrho$, $|x_0a_2| = 3\varrho$, $|x_0a_3| = 7\varrho, \cdots |x_0a_n| = (2^n - 1)\varrho$. Da $2^n - 1$ zugleich mit n ins Unendliche wächst, so werden die Punkte a_n einmal den Mittelpunkt c der Strecke ax_1 überschreiten. a_m sei der erste unter ihnen, welcher näher an a als an x_1 liegt.

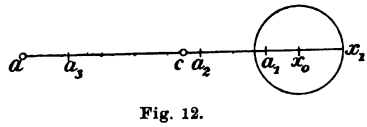


Fig. 12.

Nach dem 1. Satze ergibt sich aus $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ durch Ableitung für den Punkt a_1, welcher innerhalb ihres Konvergenzkreises liegt, die nämliche Potenzreihe von $x - a_1$, wie unmittelbar aus der Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ d. i. die Reihe $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$ in (a). Der Punkt a_2 liegt nach V, 8 innerhalb des Konvergenzkreises dieser Potenzreihe von $x - a_1$; wir finden somit durch Ableitung aus ihr für den Punkt a_2 die Reihe $\mathfrak{P}_2(x - a_2)$ in (a). U. s. f. So kommen wir endlich auf die Reihe $\mathfrak{P}_m(x - a_m)$ in (a). Da $|aa_m| < R/2$ ist, so können wir daraus eine Potenzreihe für den Punkt a selbst ableiten, und zwar fällt sie nach dem gerade Bemerkten mit der ursprünglichen Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ zusammen.

3. Über Funktionen, welche in allen Punkten einer endlichen regulären Linie eindeutig erklärt und dabei holomorph sind.

Gegeben sei eine ganz im Endlichen gelegene, vom Punkte a bis zum Punkte b in festgesetzter Weise beschriebene Linie l, welche

aus einer endlichen Anzahl von konvexen Bogen ohne Ecken (S. 62) und geraden Strecken besteht. Sowohl die ersteren, als auch die letzteren können ganz fehlen. Die Endpunkte a, b dürfen auch zusammenfallen. Auch Doppel- und mehrfache Punkte können in der Linie $\mathfrak{l}$ vorkommen, ja es dürfen ganze Stücke von ihr zwei und mehrere Male durchlaufen sein. Eine solche Linie möge als regulär bezeichnet werden. Da indes im folgenden nur solche Linien vorkommen, so wird dieses Beiwort der Kürze wegen meist wegbleiben. Bedeutet x einen Punkt von $\mathfrak{l}$ zwischen a und b, so befinden sich auf $\mathfrak{l}$, sowohl vor als hinter x, Punkte x' von der Beschaffenheit, daß wenn ein Punkt das Stück der Linie $\mathfrak{l}$ von x bis x' beschreibt, sein Abstand von x beständig zunimmt. Solche Punkte x' mögen kurz Nachbarn des Punktes x auf $\mathfrak{l}$ oder ihm benachbart heißen. Zu den Endpunkten a, b gibt es nur je eine Art von Nachbarn.

Für jeden Punkt x von $\mathfrak{l}$, a und b eingeschlossen, sei eine Funktion $f(x)$ eindeutig erklärt. Dabei soll sie dafür holomorph sein, d. h. es gehört zu x eine positive Zahl $R(x)$ von der Beschaffenheit, daß für alle Nacharn x' des Punktes x auf $\mathfrak{l}$, deren Abstand von x kleiner als $R(x)$ ist, mit Einschluß des Punktes x selbst, $f(x')$ durch eine und dieselbe konvergente ganze Potenzreihe von $x'-x$, $\mathfrak{P}(x'-x)$, dargestellt werden kann. Fallen die Endpunkte a, b von $\mathfrak{l}$ zusammen, so braucht zu a als Schlußpunkt nicht die nämliche ganze Potenzreihe von $x-a$ zu gehören, wie zu a als Anfangspunkt. Ähnliches gilt von jedem Doppel- und mehrfachen Punkte c der Linie $\mathfrak{l}$: es können dazu so viele ganze Potenzreihen von $x-c$ gehören, als Durchgänge der Linie durch ihn stattfinden.

1. Satz. „Demgemäß hat man, wenn x_0 irgend einen Punkt der Linie $\mathfrak{l}$ bedeutet, für alle Nachbarn x desselben auf ihr, deren Abstand von x_0 kleiner als $R(x_0)$ ist,

$$f(x) = \mathfrak{P}_0(x - x_0). \tag{1}$$

Ist x_1 ein bestimmter unter diesen Punkten, so soll für jene Nachbarn x desselben auf $\mathfrak{l}$, deren Abstand von x_1 kleiner als $R(x_1)$ ist,

$$f(x) = \mathfrak{P}_1(x - x_1) \tag{2}$$

sein. Die ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}_1$ von $x - x_1$ ist indes identisch mit der Reihe, welche aus $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$ durch Ableitung für den Punkt x_1 entsteht."

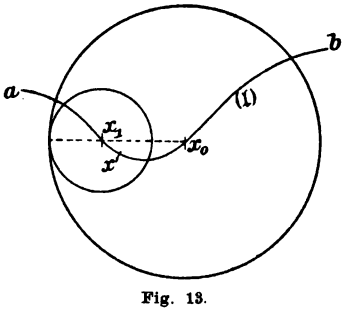


Fig. 13.

Beweis. Bezeichnen wir die Potenzreihe von $x - x_1$, welche wir aus der Reihe (1), deren Konvergenzkreis in Fig. 13 durch den Kreis mit dem Mittelpunkt x_0 dargestellt ist, für den Punkt x_1

auf $\mathfrak{l}$ ableiten, mit $\overline{\mathfrak{P}}_1(x - x_1)$, so besteht für die Punkte x' auf $\mathfrak{l}$, die innerhalb des Kreises um x_1, welcher den Kreis um x_0 von innen berührt, gelegen sind, nach V, 8 die Gleichung

$$f(x') = \mathfrak{P}_0(x' - x_0) = \overline{\mathfrak{P}}_1(x' - x_1).$$

Lassen wir $|x' - x_1|$ auch kleiner als $R(x_1)$ sein, so haben wir weiters nach (2)

$$f(x') = \mathfrak{P}_1(x' - x_1).$$

Für alle diese Punkte x' ist demnach

$$\overline{\mathfrak{P}}_1(x' - x_1) = \mathfrak{P}_1(x' - x_1),$$

daher sind nach V, 5 die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_1$ von $x - x_1$ identisch.

Aus dem 1. Satze folgt unmittelbar der

2. Satz. „Ist $f(x)$ bei irgend einem Punkte $x = x_0$ der Linie $\mathfrak{l}$ durch eine beständig konvergente Potenzreihe von $x - x_0$ dargestellt, so bei allen andern Punkten x_1 dieser Linie durch eine ebensolche Potenzreihe von $x - x_1$."

Daraus folgt, daß wenn der Konvergenzradius der zu einem Punkte x der Linie $\mathfrak{l}$ in der Darstellung von $f(x)$ gehörigen Potenzreihe endlich ist, er auch endlich sein muß für die zu irgend einem andern Punkte von $\mathfrak{l}$ gehörige Potenzreihe.

Nunmehr werde die gegebene Linie $\mathfrak{l}$ durch eine Gleichung von der Form

$$x = g(\tau) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \tag{3}$$

dargestellt.

3. Satz. „Wenn der Konvergenzradius $R(x)$ der zu irgend einem Punkte x von $\mathfrak{l}$ in der Darstellung von $f(x')$ gehörigen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x' - x)$ endlich ist, so ändert er sich stetig, während x die gegebene Linie $\mathfrak{l}$ von a bis b durchläuft." Genauer: $R(g(\tau))$ ist eine im ganzen Intervalle (α, β) von τ stetige Funktion von τ.

Beweis. Nach einem Satze V, 8 ist, wenn nur der Punkt x' von $\mathfrak{l}$ innerhalb des Kreises $(x, R(x))$ liegt,

$$R(x) - |xx'| \leqq R(x') \leqq R(x) + |xx'| \quad \text{oder}$$
$$|R(x') - R(x)| \leqq |xx'|. \tag{4}$$

Da nun neben $x = g(\tau) \quad x' = g(\tau')$

$$xx' = g(\tau') - g(\tau)$$

und $g(\tau')$ für jeden der in Rede stehenden Werte von τ' stetig ist, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß neben

$$|\tau' - \tau| < \delta \qquad |g(\tau') - g(\tau)| < \varepsilon$$

ist. Also ist nach (4) neben $|\tau' - \tau| < \delta \qquad |R(g(\tau') - R(g(\tau))| < \varepsilon$

w. z. b. w.

Kraft des Satzes in I. 17 erreicht die im Intervalle (α, β) von τ stetige Funktion $R(g(\tau))$, welche nur positive Werte hat, ihre untere Schranke $\varkappa$; diese ist daher nicht Null, sondern eine positive Zahl.[1])

4. Satz. „Aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$, welche die Eingangs der Nr. erklärte Funktion $f(x)$ in allen Punkten von $\mathfrak{l}$, deren Abstand von a kleiner als $R(a)$ ist, darstellt, läßt sich durch Vermittelung einer endlichen Anzahl von Punkten der Linie $\mathfrak{l}$ für jeden Punkt x_1 derselben (mit Einschluß von b) die ihm zugehörige Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$, d. i. wofür die Gleichung (2) besteht, ableiten."

Beweis. $\varkappa'$ sei eine positive Zahl kleiner als $\varkappa$. Man kann nun einer jeden konvexen Linie ohne Ecken ein Polygon einschreiben, dessen Seiten mit Ausnahme der letzten sämtlich gleich $\varkappa'$ sind, während diese bloß $\varkappa'$ nicht überschreiten soll. Da dies Stück der Linie $\mathfrak{l}$ von a bis x_1 aus einer endlichen Anzahl von solchen Bogen und geraden Strecken besteht, so lassen sich zwischen a und x_1 eine endliche Anzahl Punkte $a_1, \cdots a_m$ so einschalten, daß

$$|aa_1| = |a_1a_2| = \cdots = |a_{m-1}a_m| = \varkappa' \qquad |a_mx_1| \leqq \varkappa' \tag{5}$$

ist. Dabei gehört a_1 zu den Nachbarn von a auf $\mathfrak{l}$ (S. 306), a_2 zu denen von a_1 u. s. f. Nunmehr wenden wir den 1. Satz $(m+1)$Male nacheinander an. Da der Punkt a_1 noch innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ liegt, so ist nach diesem Satze für alle Nachbarn x desselben auf $\mathfrak{l}$, deren Abstand von a_1 kleiner als $R(a_1)$ ist, $f(x)$ gleich der Summe der aus $\mathfrak{P}(x-a)$ für den Punkt a_1 abgeleiteten Reihe, welche wir mit $\mathfrak{P}^{(1)}(x-a_1)$ bezeichnen. Nun liegt a_2 innerhalb des Konvergenzkreises der letzten Reihe; wenn wir also daraus für den Punkt a_2 etwa $\mathfrak{P}^{(2)}(x-a_2)$ herleiten, so ist wieder nach dem 1. Satze ihre Summe gleich $f(x)$ für alle Nachbarn x von a_2 auf $\mathfrak{l}$, wofür $|x-a_2| < R(a_2)$ ist. Fahren wir so fort, so erlangen wir für den Punkt a_m eine Potenzreihe von $x-a_m$, etwa $\mathfrak{P}^{(m)}(x-a_m)$, welche identisch ist mit derjenigen Potenzreihe von $x-a_m$, welche für die Nachbarn von a_m auf $\mathfrak{l}$, deren Abstand von a_m kleiner als $R(a_m)$ ist, die gegebene Funktion $f(x)$ darstellt. Innerhalb ihres Konvergenzkreises liegt x_1; also fällt nach dem 1. Satze die aus ihr für den Punkt x_1 abgeleitete Potenreihe von $x-x_1$ zusammen mit der Reihe $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ in (2), welche $f(x)$ darstellt, wenn $|x-x_1| < R(x_1)$ ist.

5. Satz. „Wenn zwei Funktionen $f(x)$, $h(x)$, die in jedem Punkte der von a ausgehenden Linie $\mathfrak{l}$ eindeutig definiert und dabei holomorph sind, in allen Punkten eines Stückes ax_0 dieser Linie übereinstimmen, so haben sie in jedem Punkte der Linie den nämlichen Wert."

---

1) Vgl. A. Harnack, Math. Ann. XXI, S. 319.

Beweis. Zufolge des oben Bemerkten hat der Konvergenzradius für die zu $f(x)$, sowie für die zu $h(x)$ gehörigen Potenzreihen je ein positives Minimum $\varkappa$, λ. Nun sei $\varkappa'$ eine positive Zahl kleiner als $\varkappa$ und λ. — Da $f(x)$ und $h(x)$ längs eines Stückes ax_0 von $\mathfrak{l}$ übereinstimmen, so müssen sie in der Umgebung des Punktes a durch eine und dieselbe ganze Potenzreihe von $x-a$, $\mathfrak{P}(x-a)$, dargestellt sein. Bedeutet dann x_1 einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{l}$, b eingeschlossen, so sei dem Stücke ax_1 von ihr das aus den Seiten (5) bestehende Polygon $aa_1 \cdots a_m x_1$ eingeschrieben. Da das ganze Stück aa_1 von $\mathfrak{l}$ innerhalb des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}(x-a)$ liegt, so müssen kraft des 1. Satzes die beiden Funktionen $f(x)$, $h(x)$ auch in der Umgebung des Punktes a_1 durch eine und dieselbe Potenzreihe von $x-a_1$ dargestellt sein. Das Nämliche gilt für die Punkte $a_2 \cdots a_m$ und da x_1 noch im Konvergenzkreise der sowohl $f(x)$ als auch $h(x)$ in der Nachbarschaft von a_m darstellenden Potenzreihe von $x-a_m$ liegt, so folgt, daß $f(x_1) = h(x_1)$ ist.

Der letzte Satz gilt auch für eine Linie, deren Endpunkt der Punkt $x=\infty$ ist, wenn wir nur annehmen, daß jedes endliche Stück ax' derselben regulär ist. Somit stimmen die Funktionen $f(x)$, $h(x)$ für jeden endlichen Punkt überein. Da man nun weiß, daß jede bei hinlänglich großem $|x|$ durch eine ganze Potenzreihe von $1:x$ dargestellt ist, so müssen demgemäß auch diese beiden Reihen identisch sein.

4. Die Fortsetzung der Summe einer ganzen Potenzreihe von $x-a$ längs einer von a ausgehenden endlichen Linie.

Es sei die bloß innerhalb des Kreises vom Radius $R(a)$ konvergente ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ gegeben und von a bis zu einem Punkte b, der auch mit a zusammenfallen darf, eine endliche Linie $\mathfrak{l}$ gezogen.

1. Satz. „Läßt sich aus der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ durch Vermittelung sowohl der Punkte $a_1, a_2, \cdots a_m$ auf der Linie $\mathfrak{l}$, als auch der Punkte $b_1, b_2, \cdots b_n$ von ihr für den Punkt b je eine Potenzreihe von $x-b$ ableiten, so sind sie identisch.“ Dabei ist angenommen, daß das Stück aa_1 von $\mathfrak{l}$ ganz innerhalb des Kreises $(a, R(a))$, das Stück a_1a_2 von $\mathfrak{l}$ ganz innerhalb des Kreises $(a_1, R(a_1))$, welcher zu der für den Punkt a_1 erhaltenen Potenzreihe von $x-a_1$ gehört, liegt, endlich das Stück $a_m b$ sich innerhalb des Konvergenzkreises der für a_m erhaltenen Potenzreihe von $x-a_m$ befindet. U. s. f.

Der Satz läßt sich sowohl aus dem 1. Satze als auch aus dem 5. von Nr. 3 herleiten. Halten wir uns an den ersteren, so haben wir aus den beiden Punktfolgen $a_1 \cdots a_m$, $b_1 \cdots b_n$ eine dritte $c_1, c_2, \cdots c_p$ zu bilden, wobei die Punkte c_1, c_2 usw. in dem Sinne, in welchem $\mathfrak{l}$ beschrieben ist, aufeinander folgen. Ist etwa $c_r \equiv a_1$, so ist nach dem genannten Satze klar, daß wir auch nach Einschaltung der

Punkte $c_1, c_2, \cdots c_{r-1}$ zwischen a und a_1 für a_1 die nämliche Potenzreihe von $x - a_1$ erlangen, als wie wenn wir unmittelbar von a auf den Punkt a_1 übergehen. Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß wenn wir von der soeben erwähnten Potenzreihe von $x - c_r = x - a_1$ ausgehend, die abgeleiteten Reihen für die Punkte $c_{r+1}, \cdots c_s$, von denen der letzte mit a_2 identisch sei, bilden, die für c_s erhaltene Potenzreihe von $x - c_s$ die Reihe ist, welche wir bei unmittelbarem Übergang von a_1 zu a_2 bekommen. Usw. Wir erhalten somit bei Benutzung der dritten Folge von Punkten für den Endpunkt b die nämliche Potenzreihe von $x - b$, wie bei Benutzung der ersten Folge. Ganz auf die nämliche Weise schließt man, daß bei Benützung der dritten Folge von Punkten für den Punkt b dieselbe Potenzreihe von $x - b$ herauskommt, wie bei Benutzung der zweiten Folge. Demnach sind die beiden Potenzreihen von $x - b$, die man durch Vermittelung der Punktfolgen $a_1, \cdots a_m$ und $b_1, \cdots b_n$ für den Punkt b erlangt, miteinander identisch.

Aus dem vorstehenden Satze folgt, daß wenn sich überhaupt aus der Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ auf der Linie $\mathfrak{l}$ für deren Endpunkt b eine Potenzreihe $x - b$ ergibt, nur eine einzige solche Reihe möglich ist. Man darf daher in diesem Falle statt von einer Fortsetzung der gegebenen Potenzreihe von $x - a$ längs der Linie $\mathfrak{l}$ von der Fortsetzung der für a gegebenen Potenzreihe längs dieser Linie sprechen.

2. Satz. „Läßt sich aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ auf der von a ausgehenden Linie $\mathfrak{l}$ durch das Verfahren der Ableitung für deren Endpunkt b eine ganze Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x - b)$ gewinnen, so erhält man aus der letzteren auf der rückwärts von b bis a durchlaufenen Linie $\mathfrak{l}$ durch das genannte Verfahren für den Punkt a die ursprüngliche Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ wieder."

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 2) in Nr. 2. Die Reihe $\mathfrak{Q}(x - b)$ wird erhalten, indem man zwischen a und b eine endliche Anzahl von Punkten, $a_1, \cdots a_m$, einschaltet und aus $\mathfrak{P}(x - a)$ die Reihe $\mathfrak{P}_1(x - a_1)$, daraus die Reihe $\mathfrak{P}_2(x - a_2)$ u. s. f., endlich aus $\mathfrak{P}_m(x - a_m)$ die Reihe $\mathfrak{Q}(x - b)$ ableitet. Dann kann man aber zufolge des genannten Satzes aus der Reihe $\mathfrak{Q}(x - b)$ die Reihe $\mathfrak{P}_m(x - a_m)$, aus dieser die Reihe $\mathfrak{P}_{m-1}(x - a_{m-1})$ u. s. f. und endlich aus $\mathfrak{P}_1(x - a)$ für den Punkt a die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ auf die bekannte Weise gewinnen.

3. Satz. „Es seien eine konvergente ganze Potenzreihe von $x - a$, $\mathfrak{P}(x - a)$, und eine von a ausgehende, mit einem Punkte b endigende Linie $\mathfrak{l}$ gegeben. Dann kann man entweder aus dieser Reihe durch das längs der Linie $\mathfrak{l}$ angewandte Verfahren der Ableitung für den Punkt b eine Potenzreihe von $x - b$ erlangen — oder man trifft, von a auf $\mathfrak{l}$ gegen b fortschreitend, einen Punkt c, welcher auch der Punkt b selbst sein kann, von der folgenden Beschaffenheit. Für

jeden Punkt x_1 auf $\mathfrak{l}$ zwischen a und c läßt sich aus $\mathfrak{P}(x-a)$ eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x-x_1)$ herleiten, während dies für den Punkt c nicht mehr mehr möglich ist, d. h. wie nahe an c man auch einen Punkt c' auf dem Stücke ac der Linie $\mathfrak{l}$ festsetzen mag, so lassen sich die für die Punkte x' des Stückes $c'c$ (c ausgeschlossen) durch Fortsetzung der Funktion $f(x)=\mathfrak{P}(x-a)$ erhaltenen Werte $f(x')$ nicht durch eine ganze Potenzreihe von $x'-c$ darstellen. Man sagt, die für das Stück ac der Linie $\mathfrak{l}$ mit Ausnahme des Punktes c mittels der gegebenen Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ erhaltene eindeutige Funktion $f(x)$ verliert im Punkte c den Charakter einer ganzen Funktion und der Punkt c sei ein singulärer Punkt für dieselbe als Grenzpunkt für ihre Fortsetzbarkeit längs der Linie $\mathfrak{l}$."

Um diesen Satz zu zeigen, gebrauchen wir die analytische Darstellung der Linie $\mathfrak{l}$ durch die Gleichung (3) S. 307. Nun erklären wir eine reelle Veränderliche τ' dadurch, daß die aus der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ entspringende Funktion $f(x)$ sich auf dem Stücke ax' von $\mathfrak{l}$ (welches den Werten von τ von α bis τ' entspricht) mit Einschluß des Punktes x' fortsetzen lassen soll. Diese Veränderliche hat eine obere Schranke γ und zwar ist γ entweder gleich β oder kleiner als β.

Ist $\gamma=\beta$, so ist zweierlei möglich. Entweder nimmt τ' den Wert γ an oder nicht. Im ersten Falle erhalten wir für den Punkt b eine Potenzreihe von $x-b$, so daß die obige Funktion $f(x)$ auch bei $x=b$ holomorph ist. Wir sagen, diese Funktion läßt sich auf dem Wege $\mathfrak{l}$ bis zum Punkte b, diesen eingeschlossen, fortsetzen. Im zweiten Falle ist sie zwar bei jedem Punkte von $\mathfrak{l}$ außer b holomorph, in b selbst aber verliert sie den Charakter einer ganzen Funktion.

Ist $\gamma<\beta$, so kann τ' den Wert γ selbst nicht annehmen, weil, wenn $f(x)$ auch bei $x=g(\gamma)=c$ holomorph wäre, τ' auch Werte größer als γ haben müßte, also γ nicht die obere Schranke von τ' sein könnte. Somit verliert diese Funktion im Punkte c den Charakter einer ganzen. Dagegen ist, wie leicht ersichtlich, die Funktion $f(x)$ in jedem Punkte von $\mathfrak{l}$ zwischen a und c holomorph.

5. Die Fortsetzung der Summe einer ganzen Potenzreihe von $x-a$ längs einer von a ausgehenden und ins Unendliche sich erstreckenden Linie.

Legen wir uns eine konvergente ganze Potenzreihe von $x-a$ vor und ziehen von a aus eine Linie $\mathfrak{l}$ ins Unendliche d. i. eine Linie, deren Punkte sich von a beliebig weit entfernen können. Wenn wir annehmen, daß jedes endliche Stück von $\mathfrak{l}$ regulär sei, so ist es wohl möglich, daß sich die Summe der genannten Potenzreihe bis zu jedem eigentlichen Punkte $\mathfrak{l}$ fortsetzen läßt. Den Punkt $x=\infty$ selbst aber können wir durch das in der vorigen Nummer beschriebene Verfahren

nicht erreichen. Bei weiterer Beschränkung der Linie $\mathfrak{l}$ läßt sich indeß die Fortsetzung jener Summe bis zu $x = \infty$ auf folgende Weise erklären. Wir brauchen nur vorauszusetzen, daß diese Linie bei der Abbildung der x-Ebene auf die y-Ebene mit Hilfe der Formel

$$y = c + \frac{h}{x - k}, \tag{1}$$

worin c, h, k zum Teil noch festzulegende Konstante bedeuten, in eine endliche reguläre Linie $\mathfrak{m}$ übergehe. Wie schon in Übung 12), S. 136 bemerkt ist, gelangen wir zu vollständiger Einsicht über die Natur der vorzunehmenden Abbildung erst durch Homogenmachen der Formel (1) d. i. dadurch, daß wir darin $x = x_1 : x_2$ und $y = y_1 : y_2$ setzen und sie in die beiden Formeln

$$wy_1 = c(x_1 - kx_2) + hx_2, \quad wy_2 = x_1 - kx_2 \tag{2}$$

auflösen, worin w einen willkürlichen, jedoch von Null verschiedenen Faktor bezeichnet. Nehmen wir in (2) $x_2 = 0$ und denken uns dabei x_1 von 0 verschieden, so finden wir $wy_1 = cx_1$ $wy_2 = x_1$, d. i. $y = c$ d. h. dem Paare $(x_1, 0)$ oder dem Punkte $x = \infty$ der x-Ebene entspricht der Punkt $y = c$ der y-Ebene. Diesen können wir nach Belieben also auch so, wie es etwa passend erscheinen sollte, annehmen. Umgekehrt gehört zum Paare $(y_1, 0)$, wo y_1 nicht Null ist, d. i. zum Punkte $y = \infty$ das der Gleichung $0 = x_1 - kx_2$ genügende Paar (x_1, x_2), d. i. der Punkt $x = k$. Soll nun der Linie $\mathfrak{l}$ in der x-Ebene eine endliche Linie $\mathfrak{m}$ der y-Ebene entsprechen, so muß k ein eigentlicher Punkt der x-Ebene sein, welcher der Linie $\mathfrak{l}$ nicht angehört. Lassen wir dem Punkte $x = a$ den Punkt $y = b$ entsprechen, so ist

$$b = c + \frac{h}{a - k}, \text{ d. i. } (b - c)(a - k) = h.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß, wenn die Funktion $g(y)$ für alle Punkte der Linie $\mathfrak{m}$ mit Einschluß von b und c eindeutig erklärt und dabei holomorph ist, die ihr zugeordnete Funktion

$$f(x) = g\left(c + \frac{h}{x - k}\right) \tag{3}$$

in allen Punkten von $\mathfrak{l}$ mit Einschluß von $x = \infty$ eindeutig und holomorph ist.

Bezeichnet nämlich y' einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{m}$ außer c und x' den ihm auf $\mathfrak{l}$ zugeordneten, so haben wir nach (1)

$$y' = c + h : (x' - k), \tag{4}$$

somit

$$y - y' = -\frac{h(x - x')}{(x' - k)(x - k)} = -\frac{h(x - x')}{(k - x')^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x - x'}{k - x'}}. \tag{5}$$

Falls wir uns $|x - x'| < |k - x'|$ denken, so erhalten wir demnach für $y - y'$ die geometrische Reihe

$$y - y' = -\frac{h(x-x')}{(k-x')^2} - \frac{h(x-x')^2}{(k-x')^3} - \cdots \qquad (5^*)$$

Nun läßt sich die Funktion $g(y)$ für gehörig kleine Werte von $|y - y'|$ in eine konvergente ganze Potenzreihe von $y - y'$ entwickeln. Ersetzen wir in ihr y' durch den Ausdruck (4), $y - y'$ durch die Reihe (5*), so erhalten wir $f(x)$. Diese Funktion läßt sich mithin nach dem Satze in V. 7 bei gehörig kleinem $|x - x'|$ in eine ganze Potenzreihe von $x - x'$ verwandeln. Auf ähnliche Weise ergibt sich, daß eine ganze Potenzreihe von $y - c$ dadurch, daß man darin

$$y - c = \frac{h}{x-k} = \frac{h}{x} \cdot \frac{1}{1 - k:x} = \frac{h}{x} + \frac{hk}{x^2} + \frac{hk^2}{x^3} + \cdots$$

setzt (wobei in der geometrischen Reihe $|x| > |k|$ zu denken ist), für die x von gehörig großem Betrage in eine ganze Potenzreihe von $1:x$ verwandelt wird. Ist die Funktion $g(y)$ bei $y = c$ holomorph, so hat mithin die durch die Formel (3) erklärte Funktion $f(x)$ bei $x = \infty$ den Charakter einer ganzen (V. 11).

Zufolge des 4. Satzes in Nr. 3 läßt sich die Summe der ganzen Potenzreihe von $y - b$, welche die Funktion $g(y)$ in der Nachbarschaft des Punktes b darstellt, längs der Linie $\mathfrak{m}$ bis zum Punkte c (ihn eingeschlossen) fortsetzen. Wir sagen daher von der Summe der ganzen Potenzreihe von $x - a$, welche die obige Funktion $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = a$ darstellt, daß sie sich längs der Linie $\mathfrak{l}$ bis zum Punkte $x = \infty$ (ihn eingeschlossen) fortsetzen läßt.

Nunmehr ist leicht einzusehen, daß die Sätze der vorigen Nummer auch dann gelten, wenn die darin vorkommende Linie sich bis zum Punkte $x = \infty$ erstreckt. Was den ersten betrifft, so brauchen wir nur die bezügliche Linie in der obigen Weise auf eine endliche Linie zurückzuführen. Dabei ist zu bemerken, daß man die durch eine ganze Potenzreihe $\mathfrak{Q}(1:x)$ eingeführte Funktion auf einer vom Punkte $x = \infty$ ausgehenden und bei einem eigentlichen Punkte $x = a$ endigenden Linie in der gewöhnlichen Weise, d. i. durch Vermittelung einer endlichen Anzahl von Punkten dieser Linie fortsetzen kann. — Der 3. Satz in Nr. 4 läßt sich in folgender Weise auf eine ins Unendliche gehende Linie $\mathfrak{l}$ übertragen. Wenn nicht ein eigentlicher Punkt c von ihr die Grenze für die Fortsetzbarkeit der dort eingeführten Funktion $f(x)$ bildet, so muß man annehmen, daß sich aus der Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ für jeden eigentlichen Punkt x' der Linie eine ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}'(x - x')$ herleiten und sich somit die Funktion $f(x)$ dafür erklären läßt. Nun kann zweierlei eintreten. Entweder können die Werte von $f(x)$ bei hinlänglich großem $|x|$ durch eine ganze Potenzreihe von $1:x$ dargestellt werden oder nicht. Im letzteren Falle verliert $f(x)$ im Punkte $x = \infty$ den Charakter einer ganzen

Funktion; dieser Punkt ist mithin für sie ein singulärer Punkt. Im ersteren Falle ist $f(x)$ auch bei $x = \infty$ holomorph. Daß sie dann längs $\mathfrak{l}$ bis zum Punkte $x = \infty$ fortsetzbar sei, ergibt sich durch die Abbildung der x-Ebene auf die y-Ebene mittels der Formel (1), welche wir jetzt in der Gestalt

$$x = k + \frac{h}{y - c} \tag{6}$$

schreiben. Vermöge der daraus und aus der Formel (4) folgenden Beziehungen

$$x - x' = -\frac{h(y - y')}{(y' - c)(y - c)} = -\frac{h(y - y')}{(c - y')^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y - y'}{c - y'}}$$

erkennen wir nämlich, daß die Funktion

$$f\left(k + \frac{h}{y - c}\right) = g(y)$$

bei gehörig kleinem $|y - y'|$ sich in eine ganze Potenzreihe von $y - y$ entwickeln läßt, wofern nur y' von c verschieden ist. Endlich zeigt die aus (6) abgeleitete Formel

$$\frac{1}{x} = \frac{y - c}{h + k(y - c)},$$

da h von 0 verschieden ist, daß die Funktion $g(y)$ bei gehörig kleinem $|y - c|$ in eine ganze Potenzreihe von $y - c$ übergeführt werden kann, da ja $f(x)$ bei gehörig großem $|x|$ die Summe einer ganzen Potenzreihe von $1 : x$ sein soll.

6. Noch zwei Sätze über die Summe einer konvergenten ganzen Potenzreihe.

Hier schalten wir die nachstehenden zwei Sätze ein, die uns in Nr. 10 von Nutzen sein werden.

Vorgelegt sei die innerhalb des Kreises (a, R) konvergente ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$. Die Summe derselben für die Punkte innerhalb dieses Kreises werde mit $f(x)$ bezeichnet.

1. Satz. „Verbindet man zwei Punkte x_0, x_1 innerhalb des Kreises (a, R) durch eine Linie $\mathfrak{l}$, welche ihn nirgends trifft, so bilden die zu den Punkten x von $\mathfrak{l}$ gehörigen Werte von $f(x)$ eine eindeutige und für jeden holomorphe Funktion. Dieselbe ergibt sich aus der Reihe $\mathfrak{P}_0(x - x_0)$, welche wir aus der gegebenen nach V. 8 für den Punkt x_0 ableiten, durch Fortsetzung längs der Linie $\mathfrak{l}$ und zwar sind die Werte von $f(x)$ in der Umgebung eines beliebigen Punktes x' von $\mathfrak{l}$ durch die Reihe $\mathfrak{P}^{(1)}(x - x')$ dargestellt, die wir aus der gegebenen nach V. 8 für den Punkt x' ableiten. Daraus erhellt, daß, wenn wir die Punkte x_0, x_1 durch zwei Linien verbinden, welche den Kreis

(a, R) nirgends treffen, durch Fortsetzung der Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ längs einer jeden von beiden für den Endpunkt x_1 die nämliche Potenzreihe von $x-x_1$ erzielt wird."

„Ein ähnlicher Satz besteht auch für eine von x_0 ausgehende und dahin zurückkehrende Linie $\mathfrak{l}$, welche den Kreis (a, R) nirgends trifft. Die ihren Punkten x entsprechenden Werte von $f(x)$ bilden eine eindeutige und für jeden von ihnen holomorphe Funktion. Wir bekommen also bei Fortsetzung der Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$ längs der Linie $\mathfrak{l}$ für den Punkt x_0 als Endpunkt von $\mathfrak{l}$ wieder die Reihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, von der wir ausgegangen sind."

Der ganze Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze 1 in Nr. 2, 4 in Nr. 3 und 1 in Nr. 4.

Er gilt auch dann, wenn $f(x)$ die Summe einer Reihe nach ganzen Potenzen von $x-a$ bedeutet, worin die Glieder mit negativen Exponenten von $x-a$ in endlicher oder unendlicher Anzahl auftreten, wofern nur die Linie $\mathfrak{l}$ nicht durch den Punkt a geht. Dies ergibt sich unmittelbar durch Zerlegung von $f(x)$ in die Summe der Glieder mit nicht-negativen und in die mit negativen Exponenten von $x-a$. Hinsichtlich der letzteren braucht man nur noch den Satz S. 196 Z. 3 beizuziehen.

2. Satz. „Läßt sich die obige Funktion $f(x)$ längs einer von dem Punkt x_0 innerhalb des Kreises (a, R) ausgehenden und in einem Punkte r dieses Kreises endigenden Linie $\mathfrak{l}$, welche sonst ganz innerhalb desselben liegt, bis zum Punkte r fortsetzen, so hat die dafür erhaltene ganze Potenzreihe von $x-r$ in allen Punkten, welche innerhalb ihres Konvergenzkreises und des Kreises (a, R) liegen, die Summe $f(x)$.

Beweis. Die aus der Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x-x_0)$, welche wir aus $\mathfrak{P}(x-a)$ für den Punkt x_0 gewinnen, durch Fortsetzung ihrer Summe längs der Linie $\mathfrak{l}$ erzeugte Funktion hat nach dem 1. Satze in Nr. 2 in allen Punkten von $\mathfrak{l}$ außer r die Summe $f(x)$. Bezeichnen wir mit x_1 einen von diesen Punkten, so hat demnach die Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x-r)$, welche wir zufolge der Voraussetzung für den Punkt r erhalten, in jeder Umgebung von x_1 auf $\mathfrak{l}$ die Summe $f(x)$. Somit stimmen die Summen der Potenzreihen $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\mathfrak{Q}(x-r)$ in allen Punkten überein, die innerhalb der Konvergenzkreise beider liegen (V. 12).

Auch dieser Satz gilt von der Summe einer Reihe nach ganzen Potenzen von $x-a$, wenn nur die Linie $\mathfrak{l}$ nicht durch den Punkt a geht.

Daß im Falle, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ für $x=r$ konvergiert,

$$\mathfrak{P}(r-a) = \mathfrak{Q}(0)$$

ist, wird durch eine Stetigkeitsbetrachtung nach den Sätzen in V. 4 und VI. 15 gezeigt.

7. Die monogene analytische Funktion. Das Funktionselement.

Wir gelangen nunmehr zur Einsicht, daß, wenn es gelingen sollte, aus einer gegebenen konvergenten Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ von $x-a$ auf die mehrfach beschriebene Weise für gewisse Punkte b der Ebene ganze Potenzreihen von $x-b$ abzuleiten, alsdann aus einer jeden von den letzteren durch das nämliche Verfahren alle übrigen erzeugt werden können. [Wenn unter den Punkten b sich auch der Punkt a selbst befindet, so ist damit gemeint, daß sich aus $\mathfrak{P}(x-a)$ auf einer von a ausgehenden und dahin zurückkehrenden Linie für diesen Punkt eine von jener Reihe verschiedene, $\mathfrak{P}(x-a)$, herleiten läßt.] In der Tat, erhalten wir aus $\mathfrak{P}(x-a)$ für einen bestimmten Punkt b auf einem gewissen Wege $\mathfrak{w}$ von a bis b die ganze Potenzreihe $\mathfrak{Q}(x-b)$, so läßt sich aus der letzteren Reihe dadurch, daß man den Weg in umgekehrtem Sinne d. i. von b nach a zurücklegt, nach dem 2. Satze in Nr. 4 für a die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ wiedergewinnen. Durch Einschaltung dieses Weges ba kann man aus der Reihe $\mathfrak{Q}(x-b)$ alle jene Potenzreihen herleiten, die man aus der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ erzeugt hat. — Die vorstehende Bemerkung bleibt auch dann gültig, wenn einer oder gar beide Punkte a, b der Punkt $x=\infty$ sein sollten, in welchem Falle die Reihen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ bezw. nach ganzen Potenzen von $1:x$ fortschreiten.

Aus der soeben angestellten Betrachtung entnehmen wir, daß die aus der gegebenen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgehenden ganzen Potenzreihen ein Ganzes bilden. Durch dieselben wird also eine monogene[1]) analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x erklärt. Wir dürfen somit von nun an jede konvergente ganze Potenzreihe von $x-a$ als Element einer monogenen Funktion von x ansehen und jede solche Reihe als ein Funktionselement bezeichnen. Eine monogene Funktion ist durch jedes ihrer Elemente vollständig bestimmt.

Zu den Werten, welche eine analytische Funktion $f(x)$ annehmen kann, gehört auch ∞. Hat nämlich die Funktion $1:f(x)=g(x)$ für einen Punkt $x=a$ den Wert 0, so setzt man $f(a)=\infty$ (S. 10, 119).

Es gibt jedoch keine monogene Funktion $f(x)$, die in jedem Punkte x unendlich ist. Denn da eine solche Funktion durch ein Funktionselement $\mathfrak{P}(x-x_0)$ erzeugt wird, so hat sie mindestens im Punkte

---

1) Der Ausdruck „monogene Funktion" stammt von Cauchy, bedeutet indeß bei ihm eine Funktion der komplexen Veränderlichen x, welche in jedem Punkte einer Fläche $\mathfrak{E}$ eindeutig erklärt, stetig und mit einem vollständigen Differentialquotienten begabt ist. Vgl. Cauchy Oeuvres 1. S. XII. B., S. 35. Riemann (Werke S. 5) sagt dafür „Funktion der komplexen Veränderlichen x" schlechtweg.

$x = x_0$ und in den Punkten x innerhalb des Konvergenzkreises dieser ganzen Potenzreihe einen endlichen Wert.

Als Beispiele von monogenen Funktionen können wir zunächst außer den ganzen rationalen und transzendenten Funktionen nur die rationalen gebrochenen Funktionen von x namhaft machen. Eine solche Funktion in reduzierter Form ist nämlich für jeden Wert von x, wofür ihr Nenner nicht verschwindet, eindeutig und holomorph. Ziehen wir nun von einem dieser Punkte, a, eine Linie, welche durch keine der Wurzeln des Nenners der Funktion geht, bis zu einem Punkte b, so läßt sich nach dem 4. Satze in Nr. 3 aus dem Elemente, welches die Funktion in der Nachbarschaft des Punktes a darstellt, das zum Punkte b gehörige Element derselben durch das Verfahren der wiederholten Ableitung gewinnen. — Weitere monogene Funktionen treten im nächsten Abschnitte auf.

8. Ein- und mehrdeutige monogene analytische Funktionen.[1])

Aus dem Begriffe der monogenen Funktionen folgt unmittelbar die Einteilung derselben in ein- und mehrdeutige. Die monogene Funktion ist ein- oder mehrdeutig, je nachdem ihr zu erzeugendes Element $\mathfrak{P}(x|a)$ (S. 302) auf allen von a ausgehenden und dahin zurückkehrenden Wegen, längs welcher es überhaupt fortsetzbar ist, in sich selbst übergeführt wird oder nicht. In dieser Hinsicht zeigen nämlich alle Elemente der Funktion das nämliche Verhalten. Wenn das Element $\mathfrak{P}(x|a)$ auf die angegebene Weise in sich selbst übergeht, so wird auch jedes andere Element der durch das erstere erklärten Funktion auf allen von dem ihm zugehörigen Punkte ausgehenden und dort endigenden Wegen, längs welcher es überhaupt fortsetzbar ist, in sich selbst zurückgeführt. Ist nun $\mathfrak{Q}(x|b)$ ein solches Element, so gibt es zufolge Voraussetzung einen Weg ab, auf dem man aus dem Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ das Element $\mathfrak{Q}(x|b)$ erzeugen kann. Wenn dann eine in b geschlossene Linie $\mathfrak{l}$, natürlich in einem bestimmten Sinne zu beschreiben, verzeichnet wird, längs welcher sich $\mathfrak{Q}(x, b)$ bis zum Punkte b einschließlich fortsetzen läßt, so bilde man aus dem genannten Wege ab, der Linie $\mathfrak{l}$ und dem umgekehrten Wege ba eine in a geschlossene Linie. Längs derselben geht gemäß der Annahme das Element $\mathfrak{P}(x|a)$ in sich selbst über. Da nun dieses Element auf dem Wege ab in $\mathfrak{Q}(x|b)$ übergeführt wird (2. Satz in Nr. 4), so muß das Element $\mathfrak{Q}(x|b)$ beim Durchlaufen der Linie $\mathfrak{l}$ in sich selbst übergegangen sein. Aus dem soeben Bemerkten ergibt sich dann von selbst, daß, wenn aus dem Elemente $\mathfrak{P}(x|a)$ auf einem von a ausgehenden und dahin zurückkehrenden Wege ein davon verschiedenes Element $\mathfrak{P}(x|a)$ hervorgeht, zu jedem aus $\mathfrak{P}(x|a)$ er-

1) Vgl. Pincherle a. a. O. S. 354; Biermann a. a. O. S. 171, 183; Méray a. a. O. I. S. 130f.

zeugten Elemente $\mathfrak{Q}(x|b)$ ein in b geschlossener Weg gehören muß, auf welchem es in ein davon verschiedenes Element $\overline{\mathfrak{Q}}(x|b)$ übergeht. Denn würde $\mathfrak{Q}(x|b)$ auf jedem solchen Wege in sich selbst übergeführt, so müßte das Element $\mathfrak{P}(x|a)$ auf jedem in a geschlossenen Wege, längs welchen es überhaupt fortsetzbar ist, in sich selbst übergehen.

Bloß der Weierstraßsche Funktionsbegriff hat die Eigenschaft, daß, obwohl die Erklärung der monogenen Funktion nichts über die Anzahl der zu einem Werte des Argumentes gehörigen Werte derselben enthält, doch aus ihr hervorgeht, wievieldeutig die Funktion ist.

Bei einigen naheliegenden Arten von monogenen Funktionen erscheint die Monogeneität als eine Folge ihrer übrigen Eigenschaften. Hierher gehören zufolge des 4. Satzes in Nr. 3 die eindeutigen analytischen Funktionen mit isolierten singulären Punkten. Eine solche Funktion ist für jeden Punkt der Ebene mit Ausnahme einer Schar von isolierten Punkten (S. 100) eindeutig definiert und holomorph, während sie bei jedem Punkte dieser Schar den Charakter einer ganzen Funktion verliert. Diese Klasse von eindeutigen Funktionen dahin zu erweitern, daß ihre singulären Punkte, d. i. die Punkte, wo sie nicht holomorph sind, beliebig in der Ebene verteilt sein dürfen, hat jedoch keinen Sinn. Denn dazu würde auch gehören die Funktion, deren Werte in allen Punkten innerhalb eines gegebenen Kreises mit denen einer bestimmten ganzen Funktion, in allen Punkten außerhalb desselben mit denen einer zweiten ganzen Funktion übereinstimmen. Begriffe, unter welche so willkürliche Gebilde fallen, können unmöglich die Grundlage für eine „Theorie" liefern. Auch durch die Bedingung, daß die eindeutige Funktion für alle Punkte, wo sie erklärt ist, durch einen und denselben analytischen Ausdruck (S. 9, 119) gegeben sei, würde der in Rede stehende Begriff nicht haltbarer gemacht; denn ein solcher Ausdruck kann in getrennten Gebieten verschiedene monogene Funktionen darstellen (Nr. 9).

Eine andere Klasse von monogenen Funktionen bilden die algebraischen Funktionen von x.[1]) Eine solche Funktion besteht aus den Werten der Veränderlichen y, welche mit dem Argumente x verknüpft ist durch eine unzerlegbare algebraische Gleichung von höherem als ersten Grade in y. y ist mithin eine endlich-deutige Funktion von x. Für jede algebraische Funktion sind nur eine endliche Anzahl von Punkten singulär, jedoch mindestens zwei (Nr. 11). Wollte man nun als einfachste Klasse der vieldeutigen Funktionen die mit isolierten singulären Punkten einführen, so würde man nur einen wertlosen Begriff schaffen. Denn zu ihnen würde z. B. auch die zweideutige Funktion gehören, welche durch Zusammenfassung von irgend zwei eindeutigen Funktionen von x mit isolierten singulären Punkten entsteht.

Darüber, ob die Werte einer monogenen Funktion für die Werte

1) Auf den Beweis dieses Satzes können wir hier nicht eingehen. Er beruht auf dem Satze von Puiseux (vgl. V. Puiseuxs Untersuchungen über die algebr. Funktionen, dargestellt v. H. Fischer 1861, S. 134, ferner Weierstraß Werke IV, S 241).

des Argumentes in der Nachbarschaft eines ihrer singulären Punkte eine analytische Darstellung (S. 9) zulassen, läßt sich nichts Allgemeines aussagen — nicht einmal im Falle, daß sie eindeutig ist (vgl. S. 328 Note).

9. Über das Verhältnis der Begriffe: „analytischer Ausdruck" und „eindeutige monogene Funktion" zueinander.

Zum Verständnis des Folgenden ist die nachstehende Bemerkung nötig. „Hat eine eindeutige monogene Funktion für alle Punkte einer einfach begrenzten Fläche den nämlichen Wert b, so ist sie für jedes x gleich b." Denn ist a ein Punkt innerhalb jener Fläche, so kann man um ihn einen Kreis so beschreiben, daß die Funktion in allen Punkten desselben gleich b ist. Also ist das die Funktion erzeugende Element $\mathfrak{P}(x-a)$ identisch mit der Konstanten b (V. 5).

Jetzt können wir nachweisen, daß es analytische Ausdrücke (S. 9, 119) gibt, welche in getrennten Bereichen verschiedene monogene Funktionen von x darstellen.[1]) Ein solcher Ausdruck ist der von L. Seidel (Journ. f. r. u. a. Math. 73. Bd. S. 298) erwähnte Grenzwert

$$\varphi(x) = \lim_{n=+\infty} \frac{1}{1+x^n}, \tag{a}$$

wobei n die Reihe der ganzen Zahlen von 0 an durchlaufen soll. Ist $|x|<1$, so ist bei $\lim n = +\infty$ $\lim x^n = 0$ (Arithmetik, S. 186), somit $\varphi(x)=1$; ist $|x|>1$, so ist $\lim |x|^n = +\infty$, somit $\varphi(x)=0$. Somit stellt der Grenzwert (a) innerhalb und außerhalb des Kreises $(0, 1)$ zwei verschiedene monogene Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ dar, nämlich $f_1(x)=1$, $f_2(x)=0$. Noch schlagender ist das folgende, von Seidel a. a. O. zu einem anderen Zwecke mitgeteilte Beispiel

$$\psi(x) = \lim_{n=+\infty} \frac{n}{n+x^n} = \begin{cases} 1 \text{ für } |x| \leqq 1 \\ 0 \text{ für } |x| > 1. \end{cases} \tag{b}$$

$\psi(x)$ ist also für alle endlichen Werte von x erklärt. Die Formeln (b) werden durch Umformung

$$\frac{n}{n+x^n} = \frac{1}{1+x^n : n}$$

bewiesen. Für $|x|>1$ ist $\lim |x|^n : n = +\infty$ (S. 16).

Andere Beispiele: S. 332 Übung 4), VIII. Abschn. Übung 17).

Wir bemerken ferner, daß ein analytischer Ausdruck, der für einen Punkt a und die Punkte x in dem Kreise (a, R) erklärt ist, für die letzteren mit der Summe einer ganzen Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ von $x-a$ übereinstimmen kann, während sein Wert für a von

1) Vgl. Weierstraß Werke II, S. 210. Riemann (Werke, S. 39) war der gegenteiligen Ansicht, daß die Begriffe „analytischer Ausdruck" und „Funktion einer komplexen Veränderlichen" (S. 316 Note) sich decken. Vgl. auch A. Pringsheim, Math. Ann. XXI, S. 111.

$\mathfrak{P}(0)$ verschieden ist, so daß der Ausdruck bei $x = a$ unstetig ist. Beispiel: Übung 17) zum VIII. Abschnitt.

10. Die Eindeutigkeit einer monogenen Funktion in einem einfach begrenzten Bereiche.

Die Untersuchung aller monogenen Funktionen, die nicht ausdrücklich als eindeutig erklärt sind, beruht auf dem folgenden Satze von Weierstraß.

(E) „$\mathfrak{E}$ bezeichne einen einfach begrenzten Bereich im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne (S. 115, 117) und a einen Punkt im Innern desselben. Wenn das Funktionselement $\mathfrak{P}(x \mid a)$ sich auf jedem völlig innerhalb $\mathfrak{E}$ verlaufenden regulären Wege fortsetzen läßt, so (1) liefern je zwei solche Wege, welche in demselben Punkte b innerhalb $\mathfrak{E}$ endigen, das nämliche Funktionselement $\mathfrak{Q}(x \mid b)$ und (2) es geht das Element $\mathfrak{P}(x \mid a)$ auf jedem geschlossenen Wege, der ganz innerhalb $\mathfrak{E}$ liegt, in sich selbst über.“[1])

Aus dem zweiten Teile des Satzes geht der erste unmittelbar hervor. Ziehen wir nämlich von a zu b zwei Linien $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}'$ innerhalb $\mathfrak{E}$, so bilden $\mathfrak{l}$ und die von b nach a durchlaufene Linie $\mathfrak{l}'$ zusammen eine von a ausgehende und dort sich schließende Linie. Geht auf derselben $\mathfrak{P}(x \mid a)$ zunächst in $\mathfrak{Q}(x \mid b)$ und dieses Element wieder in $\mathfrak{P}(x \mid a)$ über, so muß zufolge des 2. Satzes in Nr. 4 aus $\mathfrak{P}(x \mid a)$ auf dem Wege $\mathfrak{l}'$ das Element $\mathfrak{Q}(x \mid b)$ hervorgehen. Wir können uns daher auf den Beweis des zweiten Teiles obigen Satzes beschränken.

Wir beweisen diesen 2. Teil zunächst unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{E}$ ein einfach begrenzter Bereich im eigentlichen Sinne sei. Dann ist a ein eigentlicher Punkt, so daß wir statt $x \mid a \quad x - a$ schreiben dürfen. Zunächst sind die folgenden beiden Hilfssätze zu zeigen.

1. Hilfssatz. „Der Konvergenzkreis des Funktionselementes, welches sich aus dem gegebenen $\mathfrak{P}(x - a)$ für einen innerhalb $\mathfrak{E}$ befindlichen Punkt b auf einem bestimmten Wege $\mathfrak{l}$ von a bis b, welcher ganz innerhalb des Bereiches $\mathfrak{E}$ liegt, zufolge Voraussetzung erzeugen läßt, reicht mindestens bis an die Grenze dieses Bereiches.“

---

1) Jeder der in diesem Satze genannten Wege darf ein Stück mit dem Rande von $\mathfrak{E}$ gemein haben, wofern nur feststeht, daß das Funktionselement, welches sich aus $\mathfrak{P}(x \mid a)$ für den zuerst berührten Endpunkt dieses Stückes ergibt, sich längs desselben bis zum anderen Endpunkte fortsetzen läßt. — Zu diesem Satze vgl. den von Méray a. a. O. I. Nr. 173. — Der Satz (E) ist i. T. nach Weierstraß' Vorlesungen bewiesen, vgl. auch W. F. Osgood, Bull. of the American math. soc. X. p. 294.

Beweis. Das genannte Funktionselement sei $\mathfrak{Q}(x-b)$ und $f(x)$ seine Summe in den Punkten innerhalb seines Konvergenzkreises, von welchem wir zunächst annehmen wollen, daß er vollständig innerhalb der Fläche $\mathfrak{E}$ liege. Aus V. 16 wissen wir, daß sich auf ihm mindestens ein Punkt $x=r$ befindet, worin die Funktion $f(x)$ den Charakter einer ganzen Funktion verliert. Zufolge Voraussetzung soll sich aus $\mathfrak{Q}(x-b)$ durch Fortsetzung längs der Geraden br für den Punkt r ein Element $\mathfrak{R}(x-r)$ herleiten lassen. Die Summe desselben muß nach dem 2. Satze in Nr. 6 in jenen Punkten, welche innerhalb seines und des Konvergenzkreises von $\mathfrak{Q}(x-b)$ liegen, wieder $f(x)$ sein. Dies widerspricht aber dem, was gerade über das Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung von r behauptet wurde. Die obige Annahme ist mithin nicht möglich: der Konvergenzkreis des Elementes $\mathfrak{Q}(x-b)$ reicht mindestens bis an die Grenze von $\mathfrak{E}$.

2. Hilfssatz. „Die Konvergenzradien der Funktionselemente, die sich aus dem vorgelegten Elemente $\mathfrak{P}(x-a)$ für die Punkte eines einfach begrenzten Bereiches $\mathfrak{E}'$, welcher völlig innerhalb $\mathfrak{E}$ liegt, mit Einschluß seines Randes ergeben, haben eine von Null verschiedene untere Schranke."

Bezeichnet x einen Punkt des Randes von $\mathfrak{E}$, x' einen des Randes von $\mathfrak{E}'$, so erreicht der Abstand $|xx'|$ als stetige Funktion der Koordinaten von x, x' seine untere Grenze. Da die beiden Ränder keinen Punkt gemein haben sollen, so ist dieselbe demnach nicht 0, sondern eine positive Zahl Δ. Nach dem 1. Hilfssatz kann keiner der genannten Konvergenzradien kleiner als Δ sein, somit ihre untere Grenze auch nicht.

3. Satz. „Ziehen wir vom Punkte a aus eine einfache oder wenigstens sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie $\mathfrak{l}'$, die vollständig innerhalb des Bereiches $\mathfrak{E}$ liegt, so geht das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ bei Fortsetzung längs derselben in sich selbst über."

Dieser Satz wird bewiesen, indem man die Linie $\mathfrak{l}'$ nacheinander durch andere, ebenfalls in a geschlossene Linien ersetzt, längs welcher aus $\mathfrak{P}(x-a)$ das nämliche Element erzeugt wird, wie längs $\mathfrak{l}'$. Jede solche Linie heiße äquivalent zu $\mathfrak{l}'$.

Δ' sei eine noch näher zu bestimmende positive Zahl kleiner als obiges Δ. Wir ziehen durch a zwei aufeinander senkrechte Gerade und zu jeder von ihnen auf ihren beiden Seiten Parallele im Abstande $\Delta' : \sqrt{2}$ voneinander und zwar so viele, daß das von der Linie $\mathfrak{l}'$ begrenzte Gebiet $\mathfrak{E}'$ ganz von Quadraten mit dem Inhalte $\Delta'^2 : 2$ bedeckt ist. Dabei nehmen wir Δ' so klein an, daß keines von diesen Quadraten mehr als ein (zusammenhängendes) Stück von $\mathfrak{l}'$ enthält. Im Punkte a stoßen vier solche Quadrate zusammen. Unter den übrigen Quadraten zählen wir n' solche, in welchen Innenpunkte von $\mathfrak{E}'$ sich befinden.

Nun ist leicht zu zeigen, daß man $\mathfrak{l}'$ durch eine äquivalente Linie $\mathfrak{l}''$ so ersetzen kann, daß die Anzahl n'' derjenigen Quadrate, welche Innenpunkte des von $\mathfrak{l}''$ begrenzten Bereiches $\mathfrak{E}''$ enthalten, mindestens um 1 kleiner ist als n'. Fassen wir unter den genannten n' Quadraten diejenigen ins Auge, zu welchen Punkte von $\mathfrak{l}'$ gehören. Diese Punkte von $\mathfrak{l}'$ liegen entweder zum Teil im Innern oder sämtlich auf dem Umfange des betreffenden Quadrates. Im ersten Falle schneidet $\mathfrak{l}'$ diesen Umfang in zwei Punkten, welche in der Folge, wie sie beschrieben werden, mit c, d bezeichnet seien (Fig. 14), wobei das darin schraffierte Stück aus Innenpunkten von $\mathfrak{E}'$ bestehen soll. Der Konvergenzkreis der aus dem Elemente $\mathfrak{P}(x-a)$ für den Punkt c erzielten Potenzreihe von $x-c$ umgibt das in Rede stehende Quadrat, ohne es irgendwo zu berühren, weil sein Radius größer als die Diagonale Δ' desselben ist. Daher kann man zufolge des 1. Satzes in Nr. 6 das Stück ced von $\mathfrak{l}'$ durch den Weg cfd ersetzen, d. h. man wird auf beiden Wegen das nämliche Funktionselement für den Punkt d erhalten. Bedeutet $\mathfrak{l}''$ die so abgeänderte Linie $\mathfrak{l}'$, so gehört unser Quadrat nicht zu den obigen n'' Quadraten. — Im zweiten Falle liegt das zu $\mathfrak{l}'$ gehörige Stück cd auf dem Umfange des ganz innerhalb $\mathfrak{E}'$ befindlichen Quadrates und läßt sich mit dem nämlichen Erfolge ersetzen durch den zweiten Weg, der von c längs dieses Umfanges nach d führt. Wird die auf diese Weise abgeänderte Linie auch mit $\mathfrak{l}''$ bezeichnet, so ist auch dieses Quadrat nicht zu den n'' Quadraten zu rechnen.

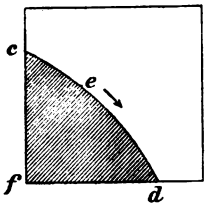


Fig. 14.

Wird auf alle n' obige Quadrate das geschilderte Verfahren angewendet, so erhält man eine $\mathfrak{l}'$ äquivalente Linie $\mathfrak{l}''$, wofür die Anzahl n'' höchstens $n'-1$ sein kann.

Bei Wiederholung der vorstehenden Betrachtung an der geschlossenen Linie $\mathfrak{l}''$ und dem von ihr gebildeten einfach begrenzten Bereiche $\mathfrak{E}''$ wird man zu einem dem Wege $\mathfrak{l}''$ äquivalenten, $\mathfrak{l}'''$, gelangen, welchem eine Zahl n''' entspricht, die mindestens um 1 kleiner ist als n''. U. s. f. Auf diese Weise — etwa nach $(k-1)$maliger Anwendung der in Rede stehenden Umwandlung — wird man einen dem ursprünglichen Wege $\mathfrak{l}'$ äquivalenten geschlossenen Weg $\mathfrak{l}^{(k)}$ durch den Punkt a erzielen, welcher die vier in ihm zusammenstoßenden Quadrate nicht verläßt. Da nun der Konvergenzradius des Elementes $\mathfrak{P}(x-a)$ größer als Δ' ist, d. i. größer als die Diagonalen eines jeden dieser vier Quadrate, so liegt der Weg $\mathfrak{l}^{(k)}$ völlig innerhalb des Konvergenzkreises der genannten Potenzreihe und zwar trifft er ihn nirgends. Nach dem 1. Satze in Nr. 6 geht daher das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ bei Fortsetzung längs des Weges $\mathfrak{l}^{(k)}$ in sich selbst über. Und weil

ihm der Weg $\mathfrak{l}'$ äquivalent ist, so gilt von diesem das Nämliche, womit der 3. Satz erwiesen ist.

Nunmehr können wir den zweiten Teil des S. 320 angeführten Satzes (E) unter der Voraussetzung, daß der Bereich $\mathfrak{E}$ eigentlich ist, allgemein zeigen, d. i. auch für den Fall, daß die vorgelegte Linie $\mathfrak{l}$ sich selbst schneidet. Zu einer solchen Linie läßt sich nämlich leicht eine ihr äquivalente ermitteln, welche sich selbst nicht schneidet, mithin den 3. Satz anzuwenden gestattet. Gehört zu $\mathfrak{l}$ eine sich selbst nicht schneidende Schleife, das ist eine Linie, welche von einem Punkte b von $\mathfrak{l}$ ausgeht und, ohne sich selbst zu kreuzen, dahin zurückkehrt, so kann sie einfach weggelassen werden; denn bei sinngemäßer Anwendung des 3. Satzes auf das Element $\mathfrak{Q}(x-b)$, mit welchem die Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x-a)$ in b eintrifft, und die Schleife ergibt sich, daß die Reihe $\mathfrak{Q}(x-b)$ bei Fortsetzung längs derselben in sich selbst übergeht. Durch Fortlassung einer endlichen Anzahl von Schleifen wird dann die gegebene Linie $\mathfrak{l}$ zu einer, die sich selbst nicht schneidet.

Um endlich den soeben erwiesenen Satz auf den Fall, daß der Bereich $\mathfrak{E}$ uneigentlich sei, zu übertragen, wendet man die in Nr. 5 auseinandergesetzte Abbildung der x-Ebene an.

Der Vollständigkeit halber müssen wir noch den folgenden Satz erwähnen, wobei es genügen wird, den Bereich $\mathfrak{E}$ als eigentlich anzusehen. „Läßt sich das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ auf zwei Wegen $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$, die mit dem Rande von $\mathfrak{E}$ nur den einen Punkt c gemein haben, bis zu diesem Punkte fortsetzen, so bekommt man für ihn auf beiden Wegen das nämliche Funktionselement.“ Das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ möge also auf dem Wege $\mathfrak{w} \equiv adc$ (Fig. 15) das Element $\mathfrak{Q}(x-c)$ mit dem Konvergenzradius S, auf dem Wege $\mathfrak{w}' \equiv ad'c$ das Element $\mathfrak{Q}'(x-c)$ mit dem Konvergenzradius S' liefern. Von c aus beschreibe man einen Kreis mit dem Radius σ, welcher kleiner als S und S' und als $|ac|$ ist; er schneide $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$ bezw. in d, d'. Nach dem 1. Satze in Nr. 6 kann man die Linie dc durch $dd'c$ ersetzen, so daß die Wege $\mathfrak{w}$ und $add'c$ äquivalent sind. Nach dem Satze (E) S. 320 aber darf man die Linie add' durch ad' ersetzen, so daß auch die Wege $add'c$ und $\mathfrak{w}'$ äquivalent sind. Somit sind es auch die Wege $\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}'$, d. h. es müssen die beiden Elemente $\mathfrak{Q}(x-c)$ und $\mathfrak{Q}'(x-c)$ identisch sein.

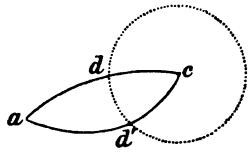


Fig. 15.

11. Einige Folgerungen aus den Sätzen von Nr. 10.

1. Satz, nach Cauchy[1]). Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, daß eine in allen Punkten innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte a und dem Radius R ein-

1) Oeuvres. I, S. 5, IV. Bd. S. 38.

deutig erklärte Funktion $f(x)$ dafür in eine und dieselbe konvergente ganze Potenzreihe von $x-a$ entwickelt werden könne, besteht darin, daß sie bei jedem von diesen Punkten holomorph ist. — Zur Darstellung der eindeutigen Funktion $f(x)$ durch eine konvergente ganze Potenzreihe von $1:(x-a)$ für alle Punkte außerhalb des Kreises (a, R), ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ bei allen mit Einschluß von $x=\infty$ holomorph ist.

Besonderer Fall des Satzes: „Eine für jeden eigentlichen Punkt der x-Ebene eindeutige erklärte Funktion, welche für jeden solchen Punkt holomorph ist, ist eine ganze rationale oder transzendente Funktion von x. — Hat sie überdies im Punkte $x=\infty$ den Charakter einer rationalen Funktion (S. 198), so ist sie eine ganze Funktion von x."

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung erhellt unmittelbar aus dem Satze S. 188 bezw. 196. — Soll $f(x)$ für $x-a$ holomorph sein, so gibt es eine solche positive Zahl K, daß für alle Werte von $x-a$, deren Betrag unter K liegt, $f(x)$ durch eine konvergente ganze Potenzreihe von $x-a$, $\mathfrak{P}(x-a)$, dargestellt wird. Nach dem 1. Satze in Nr. 10 reicht der Konvergenzkreis dieser Reihe mindestens bis zur Kreislinie (a, R), fällt also zum mindesten damit zusammen. Bezeichnen wir die Summe der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ mit $g(x)$, so gilt die Gleichung $f(x)=g(x)$ nicht bloß für die x, wofür $|x-a|<K$ ist, sondern für alle x, wofür $|x-a|<R$ ist. Lassen wir nämlich x einen Punkt sein, wofür

$$K \leqq |x-a| < R$$

ist, und ziehen wir die Strecke ax, so sind $f(x)$ und $g(x)$ zwei eindeutige Funktionen von x, welche bei jedem Punkte dieser Strecke holomorph sind und für alle Punkte derselben, deren Abstand von a kleiner als K ist, übereinstimmen. Die Werte dieser beiden Funktionen sind mithin nach dem 5. Satze von Nr. 3 in allen Punkten von ax mit Einschluß des Punktes x selbst einander gleich. — Der Zusatz ergibt sich durch Abbildung der x-Ebene mittels der Formel

$$x-a=1:(y-a).$$

Der vorstehende Satz ist von größter Wichtigkeit, indem meistens nur mit Hilfe desselben die Frage entschieden werden kann, für welchen Bereich eine gegebene Funktion von x sich in eine ganze Potenzreihe von $x-a$ entwickeln läßt.

Beispiele zum 1. Satze findet man in Übung 6) zum VII., Übung 28) zum VIII. Abschnitt, ferner in VIII. 14 b), c) und IX. 14.

Wenn eine eindeutige Funktion $f(x)$ von x in jedem eigentlichen Punkte der x-Ebene holomorph ist, so muß sie zufolge des oben Bemerkten die Summe einer beständig konvergenten Potenzreihe von x,

$\sum_0^\infty c_n x^n$, sein. Ist $f(x)$ außerdem bei $x = \infty$ meromorph, so gibt es eine positive Konstante S derart, daß für jedes x, dessen Betrag größer als S ist,

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} x^{-1} + a_{-2} x^{-2} + \cdots$$

ist. Somit besteht für alle x von einem Betrage K größer als S die Gleichung

$$\sum_0^\infty c_n x^n = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \cdots$$

Daraus folgt aber nach dem 2. Satze S. 202 die Idendität je zweier gleichstelligen Koeffizienten, somit verschwinden alle Koeffizienten a mit negativem Zeiger, a_{-1} usw. Wir finden daher

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 .$$

2. Satz. „Läßt sich die ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ von $x-a$ auf allen von a ausgehenden, im Endlichen gelegenen Wegen bis zu deren Endpunkt fortsetzen, so ist sie beständig konvergent. Oder: Wenn es für eine monogene analytische Funktion von x im Endlichen keinen singulären Punkt gibt, so ist sie für jeden eigentlichen Punkt eindeutig und zwar eine ganze rationale oder transzendente Funktion von x."

Gehen wir vom Funktionselemente $\mathfrak{P}(x-a)$ aus, lassen x' einen beliebigen von a verschiedenen Wert sein und beschreiben von a aus mit einem Radius $R' > |x'-a|$ einen Kreis, so erhellt aus dem Satze (E) S. 320, daß das genannte Element eine innerhalb dieses Kreises eindeutige Funktion $f(x)$ erzeugt. Nach dem vorigen Satze konvergiert mithin die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ sicher, wenn $|x-a| < R'$ ist, und es ist $f(x)$ ihre Summe. Also konvergiert diese Reihe beständig und die Funktion $f(x)$ erscheint bei jedem x als ihre Summe.

3. Satz. „Wenn für eine monogene analytische Funktion von x nur der eine, eigentliche Punkt a singulär ist, so ist sie für jeden anderen Punkt eindeutig und zwar eine ganze rationale oder transzendente Funktion von $1:(x-a)$."

Folgt aus dem 2. Satze durch die vorhin erwähnte Abbildung der x-Ebene. — Aus dem 2. und 3. Satz ergibt sich unmittelbar der

4. Satz. Für jede nicht eindeutige monogene analytische Funktion von x müssen mindestens zwei Punkte der x-Ebene singulär sein.

Wir werden z. B. in VIII. 8 und 9* sehen, daß für die mehrdeutigen monogenen Funktionen Lx, $\sqrt[n]{{}^*x}$, $((x))^a$, worin a keine ganze Zahl sein soll, die beiden Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ singulär sind.

12. Die am nächsten liegenden Entstehungsweisen von monogenen Funktionen.

a) „Bedeutet $G(y_1, \cdots y_m)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion der m ($\geqq 1$) Veränderlichen $y_1 \cdots y_m$ und $f_1(x), \cdots f_m(x)$ monogene Funktionen von x, welche aus den Elementen

$$\mathfrak{P}_1(x\,|\,a), \cdots \mathfrak{P}_m(x\,|\,a) \qquad (\alpha)$$

entstehen, so ist die zusammengesetzte Funktion

$$F(x) = G(f_1(x), \cdots f_m(x)) \qquad (\beta)$$

ebenfalls monogen." — Nach V. 7 und 25 läßt sich der Ausdruck

$$G(\mathfrak{P}_1(x\,|\,a), \cdots \mathfrak{P}_m(x\,|\,a)) \qquad (\gamma)$$

in eine ganze Potenzreihe von $x\,|\,a$ entwickeln, welche das Element für eine neue monogene Funktion $F(x)$ bildet. Lassen sich die Summen sämtlicher Reihen (α) längs einer Linie ab bis zum Punkte b einschließlich fortsetzen, so gilt zufolge der eben genannten Sätze dasselbe von der Funktion $F(x)$. Ist aber der Punkt b mindestens für eine der Funktionen $f_1(x), \cdots f_m(x)$ singulär, so wird er in der Regel auch für die Funktion $F(x)$ singulär sein. Notwendig ist das jedoch nicht. So ist z. B. für die Funktion $\sqrt[2]{x}$ der Punkt $x = 0$ singulär, für ihr Quadrat x jedoch nicht mehr. Da aus dem Elemente (γ) durch Fortsetzung längs der genannten Linie ab bis zum Punkte b nur der eine Wert $G\{f_1(b), \cdots f_m(b)\}$ herauskommt, so entspringen alle Werte, welche die rechte Seite der Formel (β) annehmen kann, aus dem Elemente (γ). Man kann somit für die Funktion $F(x)$ auch $G(f_1(x), \cdots f_m(x))$ schreiben.

b) „Bedeutet $\varphi(y)$ eine eindeutige monogene Funktion von y und $f(x)$ eine monogene Funktion von x, welche aus dem Elemente $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ entspringt, wobei $\varphi(y)$ beim Werte $y = \mathfrak{P}(a\,|\,a)$ $(= b)$ holomorph sein soll, so ist die zusammengesetzte Funktion $\varphi(f(x))$ monogen." — Der Beweis ist dem des Satzes a) ähnlich. Bezeichnet man das Element von $\varphi(y)$ mit $\mathfrak{Q}(y - b)$, so ist

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(x\,|\,a) - b) \qquad (\delta)$$

das Element einer neuen Funktion, die alle Werte des Ausdrucks $\varphi(f(x))$ annimmt.

Läßt man $\varphi(y)$ eine mehrdeutige Funktion von y sein, so kann der Ausdruck $\varphi\{f(x)\}$ mehrere monogene Funktionen umfassen. Es ist nämlich, möglich, daß, wenn man auch das Element (δ) auf allen von a ausgehenden und dahin zurückkehrenden Wegen, längs welcher dies überhaupt möglich ist, fortsetzt, doch nicht alle Werte des Ausdruckes $\varphi\{f(a)\}$ herauskommen.[1]) Beispiele sind in der 26. Übung zum VIII. Abschnitt angegeben.

---

1) H. Burkhardt, Funktionentheor. Vorlesungen I. 2, 1903, S. 213.

c) „Sind $f(x)$ und $g(x)$ monogene Funktionen von x, welche bezw. aus den Elementen $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ und $\mathfrak{Q}(x\,|\,a)$ entspringen, wobei der zu $x = a$ gehörige Wert $\mathfrak{Q}(a\,|\,a)$ der zweiten nicht Null sein soll, so ist auch der Quotient $f(x) : g(x)$ eine monogene Funktion von x.“

Nach V. 9 liefert der Quotient $\mathfrak{P}(x\,|\,a) : \mathfrak{Q}(x\,|\,a)$ eine ganze Potenzreihe von $x\,|\,a$, welche als Element der Funktion $f(x) : g(x)$ auftritt. Ebenso ergibt sich, daß dieser Quotient bei jedem Werte holomorph ist, wofür es Zähler und Nenner sind und der letztere nicht verschwindet. Demnach läßt sich das genannte Element des Quotienten $f(x) : g(x)$ längs einer jeden von a ausgehenden Linie fortsetzen, längs welcher sowohl sein Zähler, als auch sein Nenner fortsetzbar ist und der letztere nicht verschwindet.

d) „Die erste, zweite, ..., kurz eine jede Ableitung einer monogenen Funktion $f(x)$ bildet ebenfalls eine solche Funktion.“[1]) Folgt einfach daraus, daß die Ableitung der Summe eines jeden Elementes der Funktion $f(x)$ den nämlichen Konvergenzbereich besitzt, wie dieses selbst (V. 8). Soweit dieses fortsetzbar ist, ist demnach auch das aus ihm hervorgehende Element der Ableitung fortsetzbar.

Weiter diese Aufzählung fortzuführen, übersteigt die unserem Werke gesetzten Grenzen. Nächst den vorstehenden Funktionen wären die zu einer monogenen Funktion $f(x)$ gehörigen Integralfunktionen zu nennen, welche sämtlich die Eigenschaft haben, daß $f(x)$ ihre Ableitung ist, somit sich paarweise voneinander nur um eine Konstante unterscheiden. Ferner gehören hierher die algebraischen Funktionen von x (S. 318).

13. Ein besonderer Fall des Laurentschen Satzes.

Der genannte Satz[2]) läßt sich so formulieren. „Wenn für jeden Punkt innerhalb des ringförmigen, von den Kreisen (a, R') und (a, R), wobei $0 \leqq R' < R$ ist, eingeschlossenen Gebietes die Funktion $f(x)$ eindeutig erklärt und dabei holomorph ist, so läßt sie sich für alle diese Punkte in eine absolut konvergente Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickeln, worin im allgemeinen auch die Glieder mit negativen Potenzen von $x - a$ in unendlicher Anzahl vorkommen. Die soeben erwähnte Bedingung ist zufolge einer Bemerkung S. 196 zu dieser Darstellung von $f(x)$ auch notwendig.“ — Wenn $f(x)$ für alle eigentlichen Punkte außerhalb des Kreises (a, R')

---

1) Pincherle a. a. O. S. 354, Biermann a. a. O. S. 191.

2) Elementare Beweise dieses Satzes von A. Mittag-Leffler (Acta math. IV. S. 80), L. Scheeffer (ebenda S. 375), A. Pringsheim (Math. Ann. 47, S. 147). Vgl. auch Stolz Vorlesungen über allg. Arithmetik II, S. 188. — Der eigentliche Laurentsche Satz in den Compt. rend. 1843 fordert für die Funktion $f(x)$ nur die Cauchysche Monogeneïtät (S. 316, Note) innerhalb des Kreisringes.

holomorph ist, so gilt die in Rede stehende Entwicklung von $f(x)$ für sie alle.

Da in diesem Werke lediglich ein besonderer Fall dieses Satzes vorkommt[1]), so wollen wir uns auf den recht einfachen Beweis desselben beschränken. Dabei nehmen wir an, daß die eindeutige Funktion $f(x)$ holomorph sei in allen Punkten innerhalb des Kreises (a, R) mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von ihnen, $x_1, x_2, \cdots x_l$, bei denen sie meromorph ist (V. 6). Und zwar denken wir uns die Zeiger dieser l Zahlen so gewählt, daß die Beträge

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, \cdots |x_l - a|$$

eine nicht-abnehmende Folge bilden, so daß $|x_l - a|$ der größte von ihnen ist. x_1 darf auch gleich a sein. Da $|x_l - a| < R$ sein soll, so gibt es positive Zahlen R' zwischen $|x_l - a|$ und R. Denkt man sich R, R' auf die soeben angegebene Weise bestimmt, so gilt für diese Funktion $f(x)$ der vorstehende Satz, wie sich auf folgende Weise ergibt.

Zufolge der Voraussetzung gehört zu jedem x_r eine natürliche Zahl μ_r und eine positive Konstante K_r derart, daß, wenn nur $|x - x_r| < K_r$ ist,

$$f(x) = \frac{a_1^{(r)}}{(x - x_r)^{\mu_r}} + \frac{a_2^{(r)}}{(x - x_r)^{\mu_r - 1}} + \cdots + \frac{a_{\mu_r}^{(r)}}{x - x_r} + \mathfrak{P}_r(x - x_r) \quad (1)$$

ist, unter $\mathfrak{P}_r(x - x_r)$ eine ganze Potenzreihe von $x - x_r$ verstanden. Bezeichnen wir die Summe der negativen Potenzen von $x - x_r$ in (1) mit $R_r(x)$ und bilden die Differenz

$$f(x) - R_1(x) - R_2(x) - \cdots - R_l(x),$$

---

1) Nur die folgende Bemerkung dürfte noch am Platze sein. Nimmt man im Laurentschen Satze $R' = 0$, so erkennt man, daß eine eindeutige monogene Funktion sich in der Nachbarschaft eines singulären Punktes a dann in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickeln läßt, wenn der Punkt a unter ihren singulären Punkten isoliert ist, d. h. wenn es innerhalb eines bestimmten Kreises um a keinen weiteren singulären Punkt der Funktion gibt (S. 100). Befindet sich außerhalb des Kreises (a, R') kein singulärer eigentlicher Punkt der Funktion (oder ist, wie man sagt, der Punkt $x = \infty$ unter ihren singulären Punkten isoliert), so läßt sie sich für alle Punkte außerhalb dieses Kreises in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$ entwickeln. — Wenn der Punkt a sich unter den singulären Punkten einer eindeutigen monogenen Funktion nicht isolieren läßt, so ist die in Rede stehende Darstellung derselben auch in einer noch so kleinen Umgebung dieses Punktes unmöglich. Beispiele solcher Funktionen bieten die Quotienten gewisser eindeutiger Funktionen, z. B. $\sin \frac{1}{x - a} : \cos \frac{1}{x - a}$ dar.

so hat dieselbe in jedem Punkte innerhalb des Kreises (a, R) den Charakter einer ganzen Funktion, ist also nach dem ersten Satze in Nr. 11 die Summe einer konvergenten ganzen Potenzreihe von $x - a$, $\mathfrak{P}(x - a)$. Wir gelangen mithin zur Formel

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - a) + R_1(x) + R_2(x) + \cdots + R_l(x). \qquad (2)$$

Die in der Summe $R_1(x) + \cdots + R_l(x)$ vereinigten Glieder, im ganzen $\sum_r \mu_r$, sind, abgesehen von einem konstanten Faktor, von der Form $(x - x_r)^{-n}$. Setzen wir

$$\frac{1}{(x - x_r)^n} = \frac{1}{(x - a)^n} \cdot \left(1 - \frac{x_r - a}{x - a}\right)^{-n},$$

so erkennen wir vermittels der Formel (2) S. 241, daß, wenn $|x - a| > |x_r - a|$, also wenn $|x - a| > R'$ ist,

$$\frac{1}{(x - x_r)^n} = \frac{1}{(x - a)^n} + n\frac{x_r - a}{(x - a)^{n+1}} + \binom{n+1}{2}\frac{(x_r - a)^2}{(x - a)^{n+2}} + \cdots$$

ist. Demnach läßt sich, wenn $|x - a| > R'$ gedacht wird, die Summe $R_1(x) + \cdots + R_l(x)$ in (2) in eine ganze Potenzreihe von $1 : (x - a)$ (ohne konstantes Glied) verwandeln. $f(x)$ selbst geht also unter der soeben erwähnten Bedingung in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$ über, wodurch der Laurent'sche Satz für die in Rede stehende Funktion $f(x)$ erwiesen ist. Ist der Punkt a der einzige Pol derselben, so enthält die für die Funktion $f(x)$ erhaltene Reihe die Glieder mit negativen Exponenten von $x - a$ bloß in endlicher Anzahl; hat $f(x)$ aber mindestens einen von a verschiedenen Pol innerhalb des Kreises (a, R), so treten die genannten Glieder in jener Reihe in unendlicher Anzahl auf.

Zu den soeben betrachteten Funktionen gehört eine jede eindeutige Funktion, welche in allen Punkten innerhalb und auf dem Kreise (a, R) entweder holo- oder meromorph ist. Denn sie kann nur in einer endlichen Anzahl von solchen Punkten meromorph, in allen übrigen muß sie holomorph sein. Wäre die Funktion nämlich in unbegrenzt vielen von den genannten Punkten meromorph, so müßte es nach II. 10 unter diesen Punkten mindestens einen, a, geben, in dessen jeder Umgebung sich unbegrenzt viele Punkte befinden, wofür die Funktion meromorph ist. Dies verträgt sich weder mit der Holo-, noch mit der Meromorphie der Funktion in a. In beiden Fällen gibt es zufolge V. 8 eine Zahl $K > 0$ derart, daß die Funktion in allen Punkten von x, wofür $0 < |x - a| < K$ ist, holomorph ist.

Anwendungen: Übung 8) und 9), S. 333, 334.

14. Monogene Funktionen, die für alle endlichen Werte von x entweder holo- oder meromorph sind.

1. Satz. „Eine monogene Funktion, die für jeden endlichen Wert von x entweder holo- oder meromorph ist, besitzt im Endlichen isolierte Pole und ist eindeutig."

Daß zu einer solchen Funktion $f(x)$ nur isolierte Pole im Endlichen gehören, ergibt sich durch die am Schlusse der vorigen Nummer angestellte Überlegung.

Ist $\mathfrak{P}(x-a)$ das erzeugende Element dieser Funktion und betrachten wir einen einfach begrenzten Bereich, der den Punkt a, aber keinen Pol derselben umschließt, so ist die Funktion zufolge des 4. Satzes in Nr. 4 und des Hauptsatzes (E), S. 320 in diesem Bereiche eindeutig. Liegt innerhalb eines solchen Bereiches $\mathfrak{E}$ der Punkt a und ein, aber nur ein Pol b von $f(x)$ (Fig. 16) und ziehen wir von a aus eine dahin zurückkehrende Linie $\mathfrak{l}$, welche den Punkt b in positivem Sinne umkreist, so geht auch auf ihr das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ in sich selbst über. Um dies einzusehen, umgeben wir den Punkt b mit einem kleinen Kreise $\mathfrak{k}$ und verbinden einen Punkt d desselben mit einem Punkte c des Randes von $\mathfrak{E}$ durch eine einfache Linie, welche denselben sonst nirgends trifft und die Linie $\mathfrak{l}$ in e schneidet. Durch die Linie ced wird aus der Fläche $\mathfrak{E}$ eine einfach begrenzte gemacht, deren Rand die Linie $c\,d\,5\,6\,d\,c\,2\,1\,c$ bildet (S. 115). Zufolge des Schlußsatzes von Nr. 10 liefert die Fortsetzung des Elementes $\mathfrak{P}(x-a)$ auf den Wegen $a3e$ und $a4e$ die nämliche Potenzreihe von $x-e$. Somit geht das Element $\mathfrak{P}(x-a)$ auf dem Wege $\mathfrak{l} \equiv a3e4a$ in sich selbst über. — Den nämlichen Schluß wiederholt man, wenn der Bereich $\mathfrak{E}$ zwei, wenn er drei Pole der Funktion $f(x)$ umschließt u. s. f.

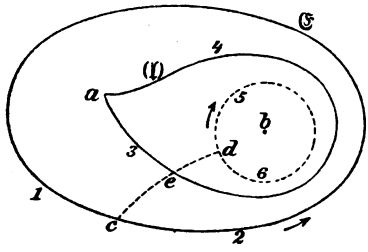


Fig. 16.

2. Satz. Eine monogene Funktion, die für jeden Wert von x mit Einschluß von $x=\infty$ entweder holo- oder meromorph ist, ist eine rationale Funktion von x.

Da diese Funktion $f(x)$ zufolge des ersten Satzes für jedes eigentliche x, welches kein Pol derselben ist, eindeutig ist und für $x=\infty$ ebenfalls holo- oder meromorph sein soll, so muß es eine positive Konstante S von der Art geben (S. 198), daß für jedes x, dessen Betrag größer als S ist, mit Einschluß von $x=\infty$ (d. i. $1:x=0$)

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 + a_{-1}x^{-1} + a_{-2}x^{-2} + \cdots \quad \text{(a)}$$

ist. Sollte $f(x)$ für $x = \infty$ holomorph sein, so braucht man in dieser Formel nur die Glieder mit positiven Exponenten von x wegzulassen. In jedem eigentlichen Punkte außerhalb des Kreises (O, S) ist mithin die Funktion $f(x)$ holomorph (S. 196).

Nun sei S' eine beliebige positive Zahl größer als S. Unter den Punkten der Kreisfläche (O, S') mit Einschluß ihres Umfanges gibt es nach dem am Schlusse der vorigen Nummer Bemerkten höchstens eine endliche Anzahl von Polen der Funktion $f(x)$. Bezeichnen wir sie mit $x_1, x_2, \ldots x_l$ und denken wir uns unter $R_1(x), \ldots R_l(x)$ die nämlichen rationalen Funktionen von x, wie S. 328, so ist die Funktion

$$f(x) - R_1(x) - \cdots - R_l(x)$$

in allen Punkten des genannten Kreises holomorph, folglich nach dem ersten Satze in Nr. 11 eine innerhalb desselben konvergente ganze Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$. Wir finden somit

$$f(x) = \mathfrak{P}(x) + R_1(x) + \cdots + R_l(x). \quad \text{(b)}$$

Ist S'' eine Zahl zwischen S und S', so bestehen für jeden Punkt x, dessen Betrag S'' ist, die beiden Formeln (a) (b) zugleich. Die rechte Seite der letzteren läßt sich für diese x ebenfalls in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x verwandeln. Dabei liefert die Summe $R_1(x) + \cdots + R_l(x)$ ausschließlich Glieder mit negativen Exponenten von x. Denn sie besteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, die, von einem konstanten Faktor abgesehen, von der Form $(x - x_r)^{-n}$ sind. Ein solches läßt sich für jedes x, dessen Betrag größer als $|x_r|$ ist, gemäß der Formel

$$\frac{1}{(x-x_r)^n} = \frac{1}{x^n}\left(1 - \frac{x_r}{x}\right)^{-n}$$

mit Hilfe des binomischen Satzes in eine ganze Potenzreihe von $1/x$ entwickeln (vgl. S. 329, wobei bloß $a = 0$ zu setzen ist). Auf diese Weise geht die Formel (b) über in

$$f(x) = \mathfrak{P}(x) + \sum_1^\infty {}_p\, b_{-p} x^{-p} \qquad (|x| > S');$$

falls $|x| = S''$ ist, besteht mithin die Gleichung

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 + \sum_1^\infty {}_p\, a_{-p} x^{-p} = \mathfrak{P}(x) + \sum_1^\infty {}_p\, b_{-p} x^{-p}.$$

Nach dem zweiten Satze S. 202 ist dieselbe eine identische, d. h. die nämlichen Potenzen von x haben auf ihren beiden Seiten gleiche Koeffizienten. Demnach gelangen wir zur Identität

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 = \mathfrak{P}(x);$$

$\mathfrak{P}(x)$ ist also eine ganze rationale Funktion von x. Bezeichnen wir das Polymon $a_m x^m + \cdots + a_0$ kurz mit $P(x)$, so erhalten wir nunmehr nach (b) die Formel

$$f(x) = P(x) + R_1(x) + \cdots + R_i(x).$$

$f(x)$ ist somit eine rationale Funktion von x, w. z. b. w.

Übungen zum VII. Abschnitt.

1) Wenn die Ableitung einer eindeutigen monogenen Funktion von x[1]) in allen Punkten einer zusammenhängenden Fläche verschwindet, so hat die Funktion für jeden von ihnen den nämlichen Wert.

2) „Diejenige monogene Funktion $f(x)$ von x zu ermitteln, welche bei jedem endlichen Werte von x entweder holo- oder meromorph, also eindeutig ist, für $x = 1$ den gegebenen Wert a hat und die Eigenschaft besitzt, daß, wenn $f(x)$, $f(y)$, $f(x + y)$ endliche Werte sind, die Beziehung

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

besteht." — Die Lösung: $f(x) = ax$ wird auf ähnliche Weise gefunden, wie die der in VIII. 3 behandelten Aufgabe.

3) Man bilde eine für jeden endlichen Wert von x eindeutige und stetige Funktion, welche nicht monogen ist. — Z. B. für alle x, deren Betrag $\geqq 1$ ist, sei $f(x) = x(x-1)$, für alle, deren Betrag > 1 ist, $f(x) = x^2(x-1)$.

4[2]) Bedeuten $m_0, m_1, \cdots m_n, \cdots$ ganze Zahlen, die mit dem Zeiger n beständig, also ins Unendliche wachsen, so hat die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1-x^{m_0}} + \sum_1^\infty{}^n \left(\frac{1}{1-x^{m_n}} - \frac{1}{1-x^{m_n-1}} \right), \tag{1}$$

nach „Arithmetik" S. 229, 383, falls $|x| < 1$ ist, den Grenzwert 1, falls $|x| > 1$, den Grenzwert 0.

Besonders einfach gestaltet sich der Ausdruck (1) bei der Annahme

---

1) x bedeutet hier und im folgenden eine komplexe Veränderliche.

2) Dieses Beispiel zu Nr. 9 nach J. Tannery (vgl. Weierstraß Werke II, S. 232). Die Reihe (2) i. T. wurde schon früher von E. Schröder (Schlömilch Z. XXII. S. 184) angegeben. Eigentlich hat bereits Seidel (vgl. S. 319) auf die Reihe (1) hingewiesen.

$m_n = 2^n$, er wird nämlich zu

$$\frac{1}{1-x} + \sum_1^\infty{}_n \frac{x^{2^n-1}}{x^{2^n}-1}. \tag{2}$$

5) Bezeichnet man den Grenzwert der Reihe (1) mit $\varphi(x)$, so stimmt der Ausdruck

$$\sum_1^k{}_r \varphi\left(\frac{x-a_r}{\varrho_r}\right) f_r(x) + \left\{1 - \sum_1^k{}_r \varphi\left(\frac{x-a_r}{\varrho_r}\right)\right\} f_{k+1}(x)$$

im Innern der k getrennt liegenden Kreise, deren Mittelpunkte bezw. a_1, $a_2, \cdots a_k$ und deren Radien bezw. $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_k$ seien, der Reihe nach mit den willkürlich vorgeschriebenen eindeutigen monogenen Funktionen $f_1(x), f_2(x), \cdots f_k(x)$ und für das übrige Gebiet mit einer weiteren solchen Funktion $f_{k+1}(x)$ überein.[1])

6) a) „Bedeuten $f(x)$ und $g(x)$ die Summen zweier ganzen Potenzreihen von x, beide innerhalb des Kreises (O, R) konvergent, wobei $g(0)$ nicht Null sein soll, so läßt sich der Quotient $f(x) : g(x)$ in eine konvergente ganze Potenzreihe von x entwickeln für alle x innerhalb des Kreises, welcher durch den oder die dem Punkte $x = 0$ nächsten Punkte im Kreise (O, R) geht, wofür der Nenner $g(x)$ verschwindet, während der Zähler $f(x)$ von Null verschieden ist. Gibt es keinen solchen Punkt, so gilt die Entwicklung für jeden Punkt innerhalb des Kreises (a, R)."[2])

b) Haben $\varphi(y)$ und $f(x)$ die nämliche Bedeutung wie in V. 7, so läßt sich der in V. 15 über die unendliche Reihe $\varphi(f(x))$ gegebene Satz auch mit Hilfe des 1. Satzes in Nr. 11 beweisen.

7) „Hat die eindeutige Funktion $f(x)$ im Punkte $x = a$ den Charakter einer ganzen oder einer gebrochenen rationalen Funktion und ist im ersten Falle $f(a) = 0$, so hat man bei hinlänglich kleinem $|x - a|$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \mathfrak{P}(x-a),$$

wobei im ersten Falle m die Ordnung des Nullwerdens der Funktion, im zweiten $-m$ die Ordnung des Unendlichwerdens derselben im Punkte a bedeutet." — Anleitung. Man kann bei hinlänglich kleinem $|x - a|$

$$f(x) = a_m(x-a)^m\{1 + (x-a)\mathfrak{P}_m(x-a)\} \qquad (m \gtrless 0)$$

setzen, wobei $|a_m|$ positiv ist.

8) „Wenn die eindeutige Funktion $f(a)$ in allen Punkten der Kreisfläche (a, R) mit Einschluß ihres Randes entweder holo- oder mero-

---

1) A. Pringsheim, Math. Ann. XXII. S. 113.

2) Dieser Satz, den wir schon in V. 17 kennen lernten, folgt am natürlichsten aus dem 1. Satze in Nr. 11. — Ein Beispiel dafür, daß die Reihe $g(x)$ bei keinem anderen Werte innerhalb ihres Konvergenzkreises außer $x = 0$ verschwindet, ist in der 30. Übung zum VIII. Abschnitt angeführt.

morph ist, so gibt es eine positive Zahl $R' < R$ derart, daß sich der Quotient $f'(x) : f(x)$ für alle x, wofür $R' < |x - a| < R$ ist, in die Reihe nach ganzen Potenzen von $x - a$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathfrak{P}(x-a) + \frac{k}{x-a} + \sum_1^\infty \frac{s_n}{(x-a)^{n+1}}$$

entwickeln läßt. Dabei ist k der Unterschied: Anzahl der Wurzeln von $f(x)$ innerhalb der Kreisfläche (a, R) weniger der Anzahl ihrer Pole daselbst, s_1 der Unterschied: Summe jener Wurzeln weniger der Summe dieser Pole, s_2 der Unterschied: Summe der Quadrate jener Wurzeln weniger der Summe der Quadrate dieser Pole usw. Jede Wurzel und jeder Pol sind so oft zu zählen, als ihre Ordnung anzeigt." (Folgerung aus dem Satze in Nr. 13.)

9) „Bedeutet $F(x)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von x, so läßt sich der Quotient $F'(x) : F(x)$ für hinlänglich große $|x|$ in eine konvergente Potenzreihe von $1 : x$ entwickeln. Der Koeffizient von $1 : x$ in dieser Reihe gibt die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ an, wodurch ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (IV. 8) zustande kommt.

10) Man weise unmittelbar d. h. durch Bildung der abgeleiteten Reihen (V. 8) nach, daß das Element des Logarithmus (VIII. 9)

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

durch Fortsetzung vom Punkte $x = 1$ aus längs des vom Nullpunkte mit dem Radius 1 im positiven Sinne beschriebenen Kreises bis zu $x = 1$ zurück sich um die Konstante $2\pi i$ ändert.

11) „Bedeutet $G(x, y)$ eine ganze Funktion von x, y und x_0, y_0 ein Wertepaar, wofür $G(x_0, y_0) = 0$ und der Koeffizient $G_{01}(x_0, y_0)$ (S. 233) von Null verschieden ist, so reicht der Konvergenzkreis der a. a. O. erwähnten ganzen Potenzreihe von $x - x_0$ mit dem konstanten Glied y_0, welche in die Gleichung $G(x, y) = 0$ für y eingesetzt sie identisch erfüllt, mindestens bis zu dem oder den dem Punkte x_0 nächsten singulären Punkten der algebraischen Funktion y von x. Er kann aber auch darüber hinausgehen." Das Nämliche gilt von jeder ganzen Potenzreihe, welche für y gesetzt die genannte Gleichung identisch erfüllt.

Da nun eine algebraische Funktion zufolge des 4. Satzes in Nr. 11 mindestens einen singulären Punkt im Endlichen besitzt, so hat mithin jede ganze Potenzreihe, welche einer unzerlegbaren algebraischen Gleichung identisch genügt, einen endlichen Konvergenzkreis. Daraus ergibt sich weiter, daß keine beständig konvergente ganze Potenzreihe eine unzerlegbare algebraische Gleichung identisch befriedigen kann. Damit ist die Bezeichnung ganze „transzendente" Funktion für die Summe einer beständig konvergenten ganzen Potenzreihe (vgl. S. 176) gerechtfertigt.

12) Periodisch heißt eine eindeutige Funktion $y = f(x)$ von x, wenn es eine von 0 verschiedene Konstante p von der Beschaffenheit gibt,

daß für jeden Wert von x $f(x+p) = f(x)$ ist. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra (IV. 8) folgt unmittelbar, daß jede periodische eindeutige monogene Funktion von x transzendent ist. Es sei $f(x_0) = y_0$. Nehmen wir an, y befriedige eine unzerlegbare algebraische Gleichung $G(x,y) = 0$, die in x vom m^{ten}, in y vom n^{ten} Grade sei, und betrachten die Gleichung $G(x,y_0) = 0$. Für jeden Wert von x kann diese nicht bestehen, weil die ganze Funktion $G(x,y)$ nicht durch $y - y_0$ teilbar sein darf. Somit können zum Werte y_0 von $f(x)$ höchstens m Werte von x gehören. Dies widerspricht aber dem Umstande, daß die Gleichung $y_0 = f(x)$ unzählige Wurzeln hat, nämlich alle von der Form $x = x_0 + kp$, unter k eine beliebige ganze Zahl verstanden. Somit kann $f(x)$ keine algebraische Funktion von x sein.

Ähnliches gilt auch für eine mehrdeutige periodische Funktion von x.

VIII. Abschnitt.

Die Kreisfunktionen für komplexe Werte des Arguments.

1. Potenzen mit komplexer Basis und reellen Exponenten.

Um die genannten Potenzen zu erhalten, lösen wir die nachstehende, zuerst von Cauchy[1]) gestellte Aufgabe, welche die unmittelbare Verallgemeinerung der in Übung 35), S. 74 vorgelegten bildet.

„Es sind alle für jedes reelle ξ eindeutigen und stetigen Funktionen $f(\xi)$ zu bestimmen, wofür bei beliebigen reellen Werten ξ, η das Additionstheorem

$$f(\xi + \eta) = f(\xi) f(\eta) \tag{1}$$

besteht. Außerdem soll $f(1)$ eine gegebene, von Null verschiedene komplexe Zahl

$$a = A\{\cos\alpha + i\sin\alpha\} \quad (|a| = A > 0, \ -\pi < \alpha \leqq \pi)$$

sein:

$$f(1) = a.“ \tag{2}$$

Setzen wir in (1) $\xi = 0$, $\eta = 1$, so folgt wegen (2) $f(0) \cdot a = a$, also ist $f(0) = 1$.

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (1) findet man unmittelbar die Formel

$$f(m\xi) = \{f(\xi)\}^m. \tag{3}$$

Daraus folgt für $\xi = 1$

$$f(m) = a^m.$$

Zufolge der Formel (1) finden wir weiter

$$f(-m) = 1 : f(m) = 1 : a^m.$$

Verstehen wir unter a^{-m} den reziproken Wert von a^m, so gilt die Formel (3) auch, wenn m eine negative ganze Zahl bedeutet.

---

1) Oeuvres 2, S. III, p 222.

Setzt man in (3) $m = n$, $\xi = 1 : n$, so erhält man die Gleichung

$$a = \left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n.$$

Demnach muß $f\left(\frac{1}{n}\right)$ einer der n Werte der n^{ten} Wurzel aus a sein:

$$a^{\frac{1}{n}} = f\left(\frac{1}{n}\right) = A^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Es würde genügen, k auf die Werte $0, 1, \ldots n-1$ einzuschränken; wir wollen jedoch k aller ganzzahligen Werte fähig erachten. Aus (3) und (4) ergibt sich weiter für $\xi = 1 : n$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^m = A^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\alpha + 2k\pi)\cdot\right\} \tag{5}$$

Man sieht unmittelbar, daß die rechte Seite bloß vom Quotienten m/n abhängt.

Bedeutet ξ die reelle irrationale Zahl (φ_n), wobei φ_n eine rationale Zahl bezeichnet, so bilden wir zunächst nach (5)

$$f(\varphi_n) = A^{\varphi_n}\{\cos\varphi_n(\alpha + 2k\pi) + i\sin\varphi_n(\alpha + 2k\pi)\cdot\} \tag{6}$$

Denken wir uns hier die ganze Zahl k von n unabhängig und lassen den Zeiger n ins Unendliche wachsen, so geht die rechte Seite wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion, des Kosinus und des Sinus bei jedem reellen Werte des Argumentes in den Ausdruck

$$A^{\xi}\{\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\} \tag{7}$$

über. Da derselbe ungeändert bleibt, wenn man für ξ eine andere Darstellung (ψ_n) wählt, so erklären wir ihn als einen Wert der gesuchten Funktionen $f(x)$ für $x = \xi$. Mithin sei

$$f(\xi) = A^{\xi}\{\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\}\cdot \tag{8}$$

Betrachten wir hier ξ als irgend eine reelle Zahl und k als eine von ξ unabhängige ganze Zahl, so stellt die rechte Seite eine eindeutige, bei jedem Werte von ξ stetige Funktion dar. Dabei ist $f(1) = a$ und es ist leicht zu zeigen, daß das Additionstheorem (1) erfüllt ist, wenn wir für $f(\xi)$ den Ausdruck (7) und für $f(\eta)$ den ihm entsprechenden setzen. Da bei irrationalem ξ je zwei zu verschiedenen Werten der ganzen Zahl k gehörige Werte von (7) ungleich sind, so sind wir zu unbegrenzt vielen Lösungen $f(\xi)$ unserer Aufgabe gelangt.

Es geht aber aus dem Vorstehenden keineswegs hervor, daß die Formel (8) alle Lösungen derselben enthält. Um dies nachzu-

weisen[1]) stellen wir mit Cauchy folgende Betrachtung an. Bezeichnet man die Koordinaten der Zahl $f(\xi)$ mit $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, setzt also

$$f(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\xi)i,$$

so ergibt sich aus der Formel $f(0) = 1$

$$\varphi(0) = 1, \quad \psi(0) = 0.$$

Da nun auch $\varphi(\xi)$ eine bei $\xi = 0$ stetige Funktion sein soll, so muß es eine solche positive Zahl λ geben, daß $\varphi(\xi)$ für jedes ξ im Intervalle $(0, \lambda)$ positiv ist. In der Tat entspricht jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß, wenn nur $0 < \xi < \delta$ ist,

$$1 - \varepsilon < \varphi(\xi) < 1 + \varepsilon$$

ist; wir brauchen uns also nur $\varepsilon < 1$ zu denken und für λ eine positive Zahl $\leqq \delta$ zu nehmen. Wenn wir

$$f(\lambda) = \sigma\,(\cos\zeta + i\sin\zeta) \quad (\sigma = |f(\lambda)|) \tag{9}$$

setzen, so muß ζ demnach zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Aus (3) folgt bei der Annahme $m = 2$, $\xi = \frac{\tau}{2}$

$$f(\tau) = \{f(\tfrac{1}{2}\tau)\}^2. \tag{10}$$

Denkt man sich $0 < \tau \leqq \lambda$, so muß $\varphi(\frac{1}{2}\tau) > 0$ sein. Setzt man nun in trigonometrischer Form

$$f(\tau) = \varrho\,\{\cos\vartheta + i\sin\vartheta\} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right),$$

so ist mithin aus (10) zu schließen, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\tau\right) = \varrho^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}\right\} \tag{11}$$

---

1) Dieser Nachweis ist keineswegs überflüssig. Denn wenn wir uns in (6) k von n abhängig denken, also dafür k_n schreiben, so können wir beim Grenzübergange $\lim = +\infty$ auch Grenzwerte erhalten, die nicht in der Formel (7) enthalten sind. Da es uns freisteht, bei gegebenem irrationalem ξ die rationalen Zahlen φ_n so zu wählen, daß ihre reduzierten Nenner einfach gerade Zahlen d. i. von der Form $2(2q_n + 1)$ sind, demnach

$$\varphi_n = (2p_n + 1) : 2(2q_n + 1)$$

setzen dürfen, so würden wir bei der Annahme $k_n = 2q_n + 1$

$$f(\varphi_n) = -A^{\frac{1}{n}}\{\cos\varphi_n\alpha + i\sin\varphi_n\alpha\},$$

somit

$$\lim_{n=+\infty} f(\varphi_n) = -A^{\xi}(\cos\xi\alpha + i\sin\xi\alpha)$$

erhalten.

ist. Wählt man hier nacheinander $\tau = \lambda, \frac{1}{2}\lambda, \ldots \frac{1}{2^{n-1}}\lambda$, so gelangt man zufolge der Formel (9) zu den weiteren

$$f\left(\frac{1}{2}\lambda\right) = \sigma^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{1}{2}\xi + i\sin\frac{1}{2}\xi\right\}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\lambda\right) = \sigma^{\frac{1}{4}}\left\{\cos\frac{1}{4}\xi + i\sin\frac{1}{4}\xi\right\}$$

. . . . . .

$$f\left(\frac{1}{2^n}\lambda\right) = \sigma^{\frac{1}{2^n}}\left\{\cos\frac{1}{2^n}\xi + i\sin\frac{1}{2^n}\xi\right\}.$$

Aus der letzten ergibt sich endlich mit Hilfe der Formel (3), indem man in dieser $\xi = \lambda : 2^n$ setzt, und der Moivreschen Formel die Gleichung

$$\left(\frac{m}{2^n}\lambda\right) = \sigma^{\frac{m}{2^n}}\left\{\cos\frac{m}{2^n}\xi + i\sin\frac{m}{2^n}\xi\right\}. \tag{12}$$

Bezeichnet nun ω eine rationale Zahl, deren reduzierter Nenner mindestens einen von 2 verschiedenen Primfaktor enthält, oder irgend eine reelle irrationale Zahl, so läßt sich ω als unendlicher dyadischer Bruch darstellen, d. h. es ist

$$\omega = \lim_{n=+\infty} S_n,$$

wobei

$$S_n = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} = \frac{m_n}{2^n}$$

ist. Hier kann c_0 jede ganze Zahl sein, während die Ziffern $c_1, c_2, \ldots$ entweder 0 oder 1 sind. Zufolge (12) hat man

$$f(S_n\lambda) = \sigma^{S_n}(\cos S_n\xi + i\sin S_n\xi).$$

Da $f(\xi)$ bei $\xi = \omega\lambda$ stetig sein soll, so wird hieraus durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ geschlossen, daß

$$f(\omega\lambda) = \sigma^{\omega}(\cos\omega\xi + i\sin\omega\xi) \tag{13}$$

ist. Zufolge (12) gilt diese Formel auch für den Fall, daß ω eine rationale Zahl ist, deren Nenner eine Potenz von 2 ist; somit besteht sie für jede reelle Zahl ω.

$\omega\lambda$ kann jede reelle Zahl ξ sein; wir dürfen daher in (13) $\omega\lambda = \xi$ d. i. $\omega = \xi : \lambda$ setzen. Eine jede von den gesuchten Funktionen $f(\xi)$ muß also in der Formel

$$f(\xi) = \sigma^{\xi:\lambda}\left\{\cos\frac{\xi}{\lambda}\xi + i\sin\frac{\xi}{\lambda}\xi\right)$$

enthalten sein, wobei die Konstanten $\sigma^{1:\lambda}$ und $\zeta:\lambda$ gemäß der Gleichung (2) zu bestimmen sind. Also muß

$$A\cos\alpha = \sigma^{1:\lambda}\cos\frac{\zeta}{\lambda}, \qquad A\sin\alpha = \sigma^{1:\lambda}\sin\frac{\zeta}{\lambda}$$

sein. Demnach ist $A^2 = \sigma^{2:\lambda}$ d. i. $A = \sigma^{1:\lambda}$ und somit

$$\cos\alpha = \cos\frac{\zeta}{\lambda}, \qquad \sin\alpha = \sin\frac{\zeta}{\lambda},$$

woraus sich für ζ/λ die Werte $\alpha + 2k\pi$ ergeben, unter k eine beliebige, jedoch feste ganze Zahl verstanden. Jeder Wert der verlangten Funktionen ist mithin aus der Formel (8) zu entnehmen, wenn man k einen konstanten d. h. von ξ unabhängigen ganzzahligen Wert beilegt, also k einen der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sein läßt.

Nunmehr erklären wir jeden Wert der rechten Seite der Formel (8) als einen der Potenz a hoch ξ und nur einen solchen Wert. Diese Potenz hat also, wenn ξ ein Bruch ist, so viele Werte, als sein reduzierter Nenner Einheiten hat, und endlich wenn ξ irrational ist, unendlich viele Werte. In den beiden letzten Fällen wird ein beliebiger Wert der in Rede stehenden Potenz mit $(\!(a)\!)^{\xi}$ bezeichnet. Wir setzen mithin

$$(\!(a)\!)^{\xi} = A^{\xi}\{\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\} \quad (k = 0, \pm 1, \cdots) \tag{14}$$

Der $k = 0$ entsprechende Wert heißt der Hauptwert der Potenz a hoch ξ und erhält das Zeichen a^{ξ}. Demnach ist

$$a^{\xi} = A^{\xi}\{\cos\xi\alpha + i\sin\xi\alpha\} \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi). \tag{15}$$

$a^{1:n}$ ist gleich $\sqrt[n]{a}$, dem Hauptwerte der n^{ten} Wurzel aus a; $a^{m:n} = (\sqrt[n]{a})^m$.

2. Erweiterung der in Nr. 1 behandelten Aufgabe auf komplexe Werte des Arguments.[1])

An die soeben erwähnte Aufgabe schließt sich naturgemäß die nachstehende: „Alle für jeden komplexen Wert von x eindeutigen und stetigen Funktionen $f(x)$ zu ermitteln, wofür bei irgend zwei komplexen Werten x, y die Gleichung

$$f(x + y) = f(x)\,f(y) \tag{16}$$

besteht und außerdem $f(1)$ eine gegebene, von Null verschiedene komplexe Zahl a sein soll."

Ist $x = \xi + \eta i$ $(\eta \neq 0)$, so hat man nach (16)

$$f(\xi + \eta i) = f(\xi)\,f(\eta i). \tag{17}$$

1) Abel, Oeuvres par Sylow et Lie I, S. 229.

$f(\xi)$ ergibt sich aus der Formel (8). Bezeichnen wir $f(\eta i)$ als komplexe Funktion der reellen Veränderlichen η mit $g(\eta)$, so erhalten wir dafür aus (16) durch die Annahme $x = \eta i$, $y = \eta' i$ die Funktionalgleichung

$$g(\eta + \eta') = g(\eta)\, g(\eta').$$

Dabei muß $g(1) = f(i)$ eine von 0 verschiedene Zahl $b = B(\cos\beta + i\sin\beta)$ $(B > 0, -\pi < \beta \leqq \pi)$ sein. Zufolge der vorigen Nummer wird also

$$f(\eta i) = g(\eta) = B^\eta[\cos\eta(\beta + 2l\pi) + i\sin\eta(\beta + 2l\pi)] = (\!(b)\!)^\eta \quad (18)$$

sein, worin l eine bestimmte, im übrigen willkürliche ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha + 2k\pi = \alpha', \qquad \beta + 2l\pi = \beta',$$

so erhalten wir nach den Gleichungen (17), (8), (18)

$$\begin{aligned} f(x) = f(\xi + \eta i) &= A^\xi \{\cos\xi\alpha' + i\sin\xi\alpha'\} \cdot B^\eta \{\cos\eta\beta' + i\sin\eta\beta'\} \\ &= A^\xi B^\eta \{\cos(\xi\alpha' + \eta\beta') + i\sin(\xi\alpha' + \eta\beta')\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Dieser Ausdruck, welcher, wie leicht zu sehen ist, in der Tat der Forderung (16) genügt, enthält außer den ganzen Zahlen k, l noch zwei willkürliche Konstante B, β.

3. Potenzen mit komplexen Exponenten.

Zur Potenz a hoch x wird der Ausdruck (19) durch passende Annahme der Konstanten B, β' (vgl. S. 355). Sie wird erreicht, indem wir zu den beiden Bedingungen von Nr. 2 als dritte fügen: $f(x)$ soll eine monogene Funktion von x sein. Genau formuliert lautet die Aufgabe nunmehr so:

„Alle monogenen Funktionen $f(x)$ der komplexen Veränderlichen x zu ermitteln, welche für $x = 1$ den von Null verschiedenen Wert a haben und die Eigenschaft besitzen, daß, wenn von den Werten $f(x)$, $f(y)$, $f(x + y)$ zwei endlich sind, der dritte sich aus der Gleichung

$$f(x)\, f(y) = f(x + y) \quad (19^*)$$

bestimmen läßt.“[1])

1) Diese Aufgabe ist in M. Ohms „Versuch eines vollkommenen konsequenten Systems der Mathematik 1822“ (vgl. 2 A. II. S. 313) zuerst behandelt. Vgl. auch S. 357, Note 1.) — Handelt es sich um die Gesammtheit der monogenen Funktionen, welche die Funktionalgleichung (19*) befriedigen, so tritt zu der i. T. ermittelten allgemeinen Lösung $f(x) = e^{a_1 x}$ noch die singuläre $f(x) = 0$.

Die letzte Forderung setzt voraus, daß keiner der Werte einer solchen Funktion Null ist. Daß dem so sei, läßt sich leicht nachweisen.

Eine jede gesuchte Funktion $f(x)$ muß aus einer konvergenten ganzen Potenzreihe von $x-b$ (wo b irgend eine komplexe Zahl sein kann) oder von $1:x$ entspringen. Von der letzteren Annahme dürfen wir jedoch absehen, weil, wenn eine Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ Funktionselement wäre, es zufolge des Satzes S. 196 auch unendlich viele Funktionselemente von der Form $\mathfrak{P}(x-b)$ geben würde. Es sei also das Element der Funktion $f(x)$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-b) + \cdots + b_n(x-b)^n + \cdots, (|x-b| < R). \quad (20)$$

Gäbe es nun einen Wert x_0 derart, daß $f(x_0) = 0$ ist, so hätte man nach (19*) $f(x_0)f(x) = f(x_0+x) = 0$, wo x irgend einen Punkt innerhalb des Kreises (b, R) bedeutet. Mithin wäre

$$f(x_0+x) = 0, \ |x-b| < R.$$

Setzt man $x_0 + x = x'$, so hätte man also $f(x') = 0$ für alle x', wofür $|x'-x_0-b| < R$ ist, d. h. für alle Punkte der x'-Ebene innerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkte x_0+b und dem Radius R. Demnach wäre die Null ein Element der gesuchten Funktion. Diese wäre mithin identisch gleich Null, was sich mit der Annahme $f(1) = a$ nicht vertragen würde. Die Funktion $f(x)$ verschwindet somit für keinen endlichen Wert von x.

In (20) statt $x-b$ u setzend, erfahren wir, daß für jedes u, dessen Betrag kleiner als R ist, $f(b+u)$ durch die Formel

$$f(b+u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n + \cdots$$

erklärt ist. Lassen wir nun in (19*) $x = u$, $y = b$ sein und bedenken, daß $f(b+u)$ und $f(b)$ bereits bekannt und zwar beide von Null verschieden sind, so finden wir daraus

$$f(u) = f(b+u) : f(b), \text{ wobei } f(b) = b_0 \text{ ist.}$$

Mithin ist für jedes u, dessen Betrag kleiner als R ist,

$$f(u) = 1 + \frac{b_1}{b_0}u + \cdots + \frac{b_n}{b_0}u^n + \cdots.$$

Schreiben wir hier x statt u, so sehen wir, daß ein Element der gesuchten Funktion eine ganze Potenzreihe von x selbst ist. Und zwar können wir, indem wir noch a_n für $b_n : b_0$ schreiben, für die Werte von x, deren Betrag kleiner als R ist, setzen

$$f(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots. \quad (20^*)^1)$$

Denken wir uns $|x| < R$ und $|y| < R - |x|$, so dürfen wir nach V. 8 die Entwicklung

1) Daß $f(0) = 1$ ist, folgt auch aus der Gleichung (19*), indem man darin $x = 0$ $y = 1$ setzt.

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n + \cdots$$

vornehmen. Andererseits ist nach (19*) und (20*)

$$f(x+y) = f(x)f(y) = f(x)\{1 + a_1 y + \cdots + a_n y^n + \cdots\}.$$

Da die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen für alle Werte von y, deren Betrag kleiner als $R - |x|$ ist, übereinstimmen sollen, so müssen nach dem Satze 2) in V. 5 die nämlichen Potenzen von y in ihnen gleiche Koeffizienten haben. Es muß also

$$f'(x) = a_1 f(x) \tag{21}$$

sein. Nun ist zufolge der Formel (20*)

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots;$$

demnach finden wir nach (21) die Gleichung

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = a_1 + a_1^2 x + \cdots + a_1 a_{n-1} x^{n-1} + \cdots,$$

welche für alle Werte von x, deren Betrag kleiner als R ist, gelten soll. Wir können somit nochmals den Satz 2) in V. 5 anwenden und gelangen so zu den Gleichungen

$$n a_n = a_1 a_{n-1} \qquad (n = 2,\ 3 \cdots).$$

Hieraus folgen nacheinander die Formeln

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2},\ a_3 = \frac{a_1^3}{2 \cdot 3},\ \cdots a_n = \frac{a_1^n}{n!}.$$

Wir erhalten somit als Element einer der gesuchten Funktionen $f(x)$ die Potenzreihe

$$1 + a_1 x + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(a_1 x)^n}{n!} + \cdots,$$

welche nach S. 178 beständig konvergiert. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man ihre Summe mit $f(x)$ bezeichnet, die Gleichung (19*) erfüllt ist.

Als Ergebnis der bisherigen Untersuchung stellt sich heraus, daß den obigen Forderungen nur diejenigen unter den ganzen transzendenten Funktionen

$$f(x) = 1 + a_1 x + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(a_1 x)^n}{n!} + \cdots \tag{22}$$

genügen, worin a_1 eine Wurzel der Gleichung

$$f(1) = a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!} + \cdots \tag{23}$$

bezeichnet. Bevor wir zur Betrachtung der Gleichung (23) übergehen (s. Nr. 7), wollen wir uns mit einer besonderen unter den in Rede stehenden Funktionen beschäftigen.

4. Die natürliche Potenz oder die Exponentialfunktion.

Wenn wir in der in Nr. 3 behandelten Aufgabe

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots,$$

welche Zahl gewöhnlich mit e bezeichnet wird, setzen, so können wir eine der Wurzeln a_1 der Gleichung (23), welche nunmehr in

$$e = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \cdots + \frac{a_1^n}{n!} + \cdots \quad . \tag{24}$$

übergeht, sofort angeben, nämlich $a_1 = 1$. Es wird sich indes in Nr. 7 zeigen, daß diese Gleichung unzählig viele Auflösungen zuläßt.

Die Aufgabe, eine reelle Funktion $f(\xi)$ der reellen Veränderlichen ξ zu bestimmen, welche bei jedem Werte von ξ stetig ist, die Funktionalgleichung $f(\xi)f(\eta) = f(\xi + \eta)$ erfüllt und zu welcher der Wert $f(1) = e$ gehört, hat, wie wir nach Übung 35), S. 74 wissen, nur die eine Lösung $f(\xi) = e^{\xi}$. Da die Summe einer ganzen Potenzreihe bei jedem Werte innerhalb ihres Konvergenzkreises stetig ist (V. 4), so erkennen wir aus der in der vorigen Nummer durchgeführten Untersuchung, daß den genannten Bedingungen auch die Funktion

$$f(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots$$

genügt. Wir müssen daraus schließen, daß die reelle Potenz

$$e^{\xi} = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots + \frac{\xi^n}{n!} + \cdots$$

ist. Bei Zulassung von komplexen Werten der Potenz wird e^{ξ} zum Hauptwert der Potenz e hoch ξ.

Darauf gestützt, erklären wir die Summe der beständig konvergenten ganzen Potenzreihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

auch bei nicht reellem x als den Hauptwert der voraussichtlich vieldeutigen Potenz e hoch x und geben ihm das Zeichen e^x. Demnach ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \tag{25}$$

Für diese Hauptwerte besteht somit das Additionstheorem

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y. \tag{26}$$

Einen besonderen Fall desselben bildet die Formel

$$e^{\xi+\eta i} = e^{\xi} \cdot e^{\eta i}. \tag{27}$$

Setzt man in die Formel (26) für e^y die Reihe ein, welche sich aus (25) für $x = y$ ergibt, so gelangt man nach V. 8 zur Formel

$$D_x e^x = e^x,$$

welche auch aus der Gleichung (21) für $a_1 = 1$ hervorgeht.

Die Reihe auf der rechten Seite der Formel (25) heißt die Exponentialreihe, ihre Summe auch die natürliche Potenz oder die Exponentialfunktion. Sie ist, da die Exponentialreihe beständig konvergiert, nach einer Bemerkung auf S. 334, Übung 11) transzendent. Dieser Charakter der Exponentialfunktion folgt auch unmittelbar aus ihrer Periodizität, vgl. S. 351.

5. Die Koordinaten von $e^{\xi i}$. Entwicklung von $\cos\xi$ und $\sin\xi$ in ganze Potenzreihen.

Ersetzt man in (25) x durch xi, so findet man die Relation

$$e^{xi} = C(x) + iS(x),$$

wenn $C(x)$, $S(x)$ die beständig konvergenten Potenzreihen

$$\begin{aligned} C(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ S(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \end{aligned} \tag{28}$$

bedeuten. $C(x)$ ist eine gerade, $S(x)$ eine ungerade Funktion von x, d. h. es ist

$$\begin{aligned} C(-x) &= \quad C(x) \\ S(-x) &= -S(x). \end{aligned}$$

Da mithin

$$e^{-xi} = C(x) - iS(x)$$

ist und nach (26)

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = 1$$

ist, so folgt die Relation

$$1 = C(x)^2 + S(x)^2. \tag{29}$$

Ersetzen wir hier x durch die reelle Veränderliche ξ, so hat man

$$e^{\xi i} = C(\xi) + iS(\xi). \tag{30}$$

Zufolge der aus (29) folgenden Beziehung

$$1 = C(\xi)^2 + S(\xi)^2$$

hat $e^{\xi i}$ den absoluten Betrag 1.

Wird $e^{\xi i}$ als komplexe Funktion der reellen Veränderlichen ξ mit $g(\xi)$ bezeichnet, so besteht nach (26) offenbar die Relation

$$g(\xi) \cdot g(\eta) = g(\xi + \eta),$$

worin ξ, η beliebige reelle Zahlen sein dürfen. Da $g(\xi)$ eine eindeutige und stetige Funktion für alle endlichen Werte von ξ und

$g(1)$ eine Zahl vom Betrage 1 und der noch unbekannten Anomalie β, also

$$g(1) = e^{\beta i} = \cos\beta + i\sin\beta$$

ist, so müssen wir wieder wie in Nr. 2 nach Nr. 1 schließen, daß

$$e^{\xi i} = g(\xi) = \cos\xi(\beta + 2l\pi) + i\sin\xi(\beta + 2l\pi) \tag{31}$$

ist, unter l eine feste ganze Zahl verstanden. Schreiben wir β' für $\beta + 2l\pi$, so finden wir durch Vergleichung der Formeln (30) und (31) die Gleichungen

$$C(\xi) = \cos\beta'\xi, \quad S(\xi) = \sin\beta'\xi. \tag{32}$$

Somit kann β' nicht Null sein; denn wäre $\beta' = 0$, so wäre $S(\xi)$ identisch gleich Null, was ja nicht der Fall ist. Setzt man in der zweiten Gleichung (32) $\beta'\xi = \tau$ und multipliziert sie mit $\beta' : \tau$, so erhält man die Formel

$$1 - \frac{\tau^2}{3!\,\beta'^2} + \frac{\tau^4}{5!\,\beta'^4} - \cdots = \beta' \cdot \frac{\sin\tau}{\tau},$$

woraus bei $\lim \tau = 0$ gemäß der Formel

$$\lim_{\tau=0} \{\sin\tau : \tau\} = 1$$

(S. 39) die Beziehung $1 = \beta'$ erhalten wird. Also hat man nach (32)

$$C(\xi) = \cos\xi, \quad S(\xi) = \sin\xi.$$

Wir sind demnach zum Satze gelangt: Für reelle Werte von x stellen die beständig konvergenten Reihen (28) die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ dar.

Wir gelangen somit zur Formel[1])

$$e^{\xi i} = \cos\xi + i\sin\xi. \tag{33}$$

Es läßt sich also die komplexe Zahl $\cos\xi + i\sin\xi$, welche auch als Richtungsfaktor eines Vektors mit der Anomalie ξ auftritt, durch $e^{\xi i}$ darstellen.

Aus den Formeln (27) und (33) ergibt sich endlich die trigonometrische Form der Zahl $e^{\xi+\eta i}$; es ist nämlich

$$e^{\xi+\eta i} = e^{\xi}\{\cos\eta + i\sin\eta\}. \tag{34}$$

Mit Hilfe dieser Formel erkennt man, daß bei $\lim x = \infty$ weder e^x einen endlichen Grenzwert, noch $|e^x|$ den Grenzwert $+\infty$ hat, daß also die Expontialfunktion, wie man sagt, im Unendlichen unbestimmt wird, was nach der Funktionentheorie von jeder ganzen transzendenten Funktion gilt. Läßt man nämlich x auf dem im Nullpunkte entspringenden Halbstrahle

$$x = \tau\{\cos\alpha + i\sin\alpha\}$$

---

1) Die Formel (33) rührt von Euler her (vgl. Introductio in anal. infinit. § 138).

ins Unendliche rücken, was dem Unendlichwerden von τ entspricht, so hat man zufolge der Formel (34)

$$|e^{\tau(\cos\alpha+i\sin\alpha)}| = e^{\tau\cos\alpha},$$

also

$$\lim_{\tau=+\infty} |e^{\tau(\cos\alpha+i\sin\alpha)}| = +\infty,\ 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\cos\alpha$ positiv, Null oder negativ ist. Demnach hat schon $|e^x|$ nicht einmal auf allen Halbstrahlen durch den Nullpunkt denselben Grenzwert.

6. Erklärung der trigonometrischen Funktionen für komplexe Werte des Arguments.

Weil die Reihen (28) bei allen reellen Werten von x die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ liefern, so liegt es nahe, die Summen der genannten Reihen auch für nicht-reelle Werte von x mit $\cos x$ und $\sin x$ zu bezeichnen, welche Zeichen fortan an Stelle von $C(x)$, $S(x)$ treten werden. Wir definieren mithin die Funktionen Kosinus und Sinus für beliebige Werte von x durch die Gleichungen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Da beide Reihen rechts beständig konvergieren, so sind $\cos x$ und $\sin x$ transzendente Funktionen von x (S. 334). Dieser Charakter derselben ergibt sich auch unmittelbar aus ihrer Periodizität (a. a. O.).

Zufolge der Gleichungen $C(x) = \cos x$, $S(x) = \sin(x)$ nimmt die erste Formel der vorigen Nummer die Gestalt an

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x. \tag{35}$$

Fügt man zur letzten Gleichung die folgende

$$e^{-xi} = \cos x - i\sin x, \tag{35*}$$

so erhält man die Formeln

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \tag{36}$$

Die Formel (29) erscheint jetzt in der Gestalt

$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1. \tag{37}$$

Jede der Funktionen $\cos x$, $\sin x$ hat sowie e^x ein Additionstheorem, d. h. es besteht eine algebraische Gleichung zwischen den Funktionswerten zu den Argumenten x, y, $x + y$. Setzt man in (26)

statt x, y zuerst $xi, \pm yi$, hierauf $-xi, \mp yi$, so findet man mit Rücksicht auf (35) und (35*) die Gleichungen

$$\cos(x \pm y) + i\sin(x \pm y) = (\cos x + i\sin x)(\cos y \pm i\sin y),$$
$$\cos(x \pm y) - i\sin(x \pm y) = (\cos x - i\sin x)(\cos y \mp i\sin y).$$

Addiert und subtrahiert man sie, so gelangt man zu den Formeln

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y. \end{aligned} \tag{38}$$

Aus ihnen folgen die Additionstheoreme mit Hilfe der Relation (37). So hat man z. B. für den Kosinus

$$\{\cos(x + y) - \cos x \cos y\}^2 = (1 - \cos x^2)(1 - \cos y^2),$$
$$1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos(x + y)^2 + 2\cos x \cos y \cos(x + y) = 0.$$

Die Formeln (38) lehren, daß $\cos x$ und $\sin x$ periodische Funktionen mit der Periode 2π sind. Setzt man darin $y = 2\pi$ und nimmt das obere Vorzeichen, so findet man wegen

$$\cos 2\pi = 1, \ \sin 2\pi = 0$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \ \sin(x + 2\pi) = \sin x. \tag{39}$$

Eben dieselben Formeln zeigen, daß aber

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \ \sin(x + \pi) = -\sin x$$

ist.

Es bestehen endlich nach V. 8 die Formeln

$$D_x \cos x = -\sin x, \ D_x \sin x = \cos x.$$

Aus der Formel (35) ergibt sich dadurch, daß man x durch $-xi$ ersetzt, die Gleichung

$$e^x = \cos(xi) - i\sin(xi). \tag{40}$$

Mithin erscheint die Exponentialfunktion als eine lineare homogene Funktion von $\cos(xi)$ und $\sin(xi)$. Da man die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ füglich als Kreisfunktionen bezeichnen kann, so darf man daher auch die Exponentialfunktion als eine solche ansehen.[1]) Dementsprechend werden auch die Umkehrungen der in Rede stehenden Funktionen, der Logarithmus und der Arcus sinus, in einer nahen Beziehung zu einander stehen (vgl. Nr. 12).

1) Natürlich ergibt sich aus der Gleichung (40) sofort die Formel

$$e^{x+2\pi i} = e^x$$ (vgl. u. S. 351).

Die übrigen trigonometrischen Funktionen werden auch für nicht-reelle Werte von x durch die Formeln

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cot} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

definiert. Daraus lassen sich ihre Eigenschaften ohne Mühe ableiten z. B. die Additionstheoreme

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \text{ usw.} \tag{41}$$

Jede von diesen Funktionen hat diejenigen Punkte, wo ihr Nenner verschwindet, zu Polen (S. 183). Für $\operatorname{tg} x$ und $\sec x$ sind es die Punkte $x = (2k+1)\pi : 2$, für die beiden anderen die Punkte $x = k\pi$, unter k irgend eine ganze Zahl verstanden. Da die einen, wie die anderen Abszissen mit k ins Unendliche wachsen, so ist der Punkt $x = \infty$ ebenfalls ein singulärer Punkt der vier Funktionen und zwar ein solcher, in dessen Umgebung keine von ihnen sich in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x entwickeln läßt (vgl. S. 328).

Hinsichtlich der Entwicklung der Funktionen $\operatorname{tg} x$ usw. in Reihen nach ganzen Potenzen von x, vgl. IX. 11. 13.

Die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ haben bei $\lim x = \infty$ keinen endlichen Grenzwert, denn das gilt schon auf jeder der reellen Halbachsen. Ebensowenig hat ihr absoluter Betrag bei $\lim x = \infty$ den Grenzwert $+\infty$. Es ist jedoch sowohl bei $\lim \eta = +\infty$, als auch bei $\lim \eta = -\infty$

$$\lim |\cos(\xi + \eta i)| = +\infty \text{ und } \lim |\sin(\xi + \eta i)| = +\infty,$$

unter ξ irgend einen festen Wert verstanden. Denn je nachdem η positiv oder negativ ist, sind $|\cos(\xi + \eta i)|$ und $|\sin(\xi + \eta i)|$ nicht kleiner als $\pm \frac{1}{2}(e^{\eta} - e^{-\eta})$.

7. Der natürliche Logarithmus und sein Hauptwert.

Am Schlusse von Nr. 3 sind wir auf die Gleichung $a = e^{a_1}$ gestoßen, welche nach a_1 aufzulösen ist. Legen wir uns demnach nun die Gleichung

$$e^x = a = \mathsf{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi) \tag{1}$$

vor, wobei A nicht Null sein soll. Setzen wir darin $x = \xi + \eta i$, so gehen aus ihr, vermöge der Formel (34) in Nr. 5, die beiden Gleichungen

$$e^{\xi}\cos\eta = \mathsf{A}\cos\alpha, \quad e^{\xi}\sin\eta = \mathsf{A}\sin\alpha \tag{2}$$

hervor. Durch Addition der Quadrate derselben folgt $e^{2\xi} = \mathsf{A}^2$ und daraus, da e^{ξ} positiv sein muß,

$$e^{\xi} = \mathsf{A}, \text{ somit } \xi = l\mathsf{A}. \tag{3}$$

Setzt man in (2) für e^{ξ} A ein und dividiert durch A, so erhält man die Gleichungen

$$\cos\eta = \cos\alpha, \quad \sin\eta = \sin\alpha \tag{4}$$

zur Bestimmung von η. Soll $-\pi < \eta \leqq \pi$ sein, so genügt diesen Gleichungen bloß die Wurzel $\eta = \alpha$. Außerdem haben sie zufolge der Formel (39) in Nr. 6 noch die Wurzeln $\eta = \alpha + 2k\pi$, wo k jede von 0 verschiedene ganze Zahl sein darf. Sämtliche Lösungen der Gleichungen (4) sind demnach in der Formel

$$\eta = \alpha + 2k\pi \tag{5}$$

enthalten, wenn k auch 0 sein darf. Zufolge der Formeln (3) und (5) hat die Gleichung (1) die Wurzeln

$$x = l\mathsf{A} + (\alpha + 2k\pi)\,i, \tag{6}$$

unter k irgend eine ganze Zahl verstanden, und nur diese.

Jede Wurzel der Gleichung $e^x = a$ heißt ein natürlicher Logarithmus von a und wird mit La bezeichnet. Unter den unbegrenzt vielen Werten von La befindet sich einer, dessen zweite Koordinate entweder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt oder gleich π ist; er ergibt sich aus der Formel (6) durch die Annahme $k = 0$. Dieser Wert heißt gewöhnlich Hauptwert[1]) des natürlichen Logarithmus von a; er wird mit la bezeichnet und zwar er allein. Man hat somit

$$la = l\,[\mathsf{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha)] = l\mathsf{A} + \alpha i \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi), \tag{7}$$

die übrigen Werte des Logarithmus von a (die Nebenwerte desselben) unterscheiden sich von seinem Hauptwerte durch Vielfache von $2\pi i$:

$$La = la + 2k\pi i \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Der Hauptwert ist dann und nur dann reell, wenn $\alpha = 0$ d. i. a reell und positiv ist; die Nebenwerte sind niemals reell. Der Hauptwert des Logarithmus einer positven reellen Zahl ist ihr reeller Logarithmus.

---

1) Die Bezeichnung „Hauptwert" der n^{ten} Wurzel, des Logarithmus, der Potenz stammt von Weierstraß. Cauchy gebrauchte dafür die von E. G. Björling vorgeschlagenen Namen: „racine, logarithme, puissance principale" (vgl. Cauchy Exerc. d'Analyse IV (1847), p. 253, Björling, Grunert Archiv XXI, S. 1). Cauchy gab für den Hauptwert des Logarithmus zuerst die i. T. aufgestellte Erklärung (Oeuvres 1. S. X, p. 77), änderte dieselbe aber später dahin ab, daß die Neigung α der Zahl a in (1) nicht außerhalb des Intervalles $(-\pi, \pi)$ anzusetzen sei, so daß es zwei Hauptwerte für den Logarithmus einer negativen reellen Zahl gibt. Allein es ist zweckmäßig, die Symbole $\sqrt[n]{a}$, la, a^x auch für einen negativen reellen Wert von a eindeutig zu erklären, damit man mit ihnen, wie man es von der reellen Arithmetik her gewohnt ist, rechnen kann.

Insbesondere hat man $l1 = 0$, $L1 = 2k\pi i$. Demnach ist $e^{2k\pi i} = 1$ und somit bei beliebigem x

$$e^{x+2k\pi i} = e^x \cdot e^{2k\pi i} = e^x \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Die Exponentialfunktion ist also periodisch und zwar mit der Periode $2\pi i$ (S. 334, Übg. 12)).

le ist gleich 1 und

$$Le = 1 + 2k\pi i. \tag{8}$$

Für die negative reelle Zahl $-\mathsf{A}$ ist $\alpha = \pi$, mithin

$$l(-\mathsf{A}) = l\mathsf{A} + \pi i, \qquad L(-\mathsf{A}) = l\mathsf{A} + (2k+1)\pi i. \tag{9}$$

Insbesondere hat man

$$l(-1) = \pi i, \quad L(-1) = (2k+1)\pi i.$$

Daß die Gleichung $e^x = 0$ keine Wurzel hat (S. 342), ersieht man auch aus den Gleichungen (1) und (2), wenn man darin $\mathsf{A} = 0$ setzt. Zufolge der letzteren müßte $e^\xi \cos\eta = 0$, $e^\xi \sin\eta = 0$, also, da $\cos\eta^2 + \sin\eta^2 = 1$ ist, $e^\xi = 0$ sein. e^ξ ist aber für jeden reellen Wert ξ positiv, also für keinen Null.

Hinsichtlich der Umgestaltung, welche die bekannten Sätze über die Logarithmen durch die nunmehrige Vieldeutigkeit derselben erleiden, verweisen wir auf XII. 7 der Arithmetik.

Ist wie oben in (1)

$$a = \mathsf{A}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad b = \mathsf{B}(\cos\beta + i\sin\beta) \quad (-\pi < \beta \leqq \pi),$$

so ist

$$la = l\mathsf{A} + \alpha i, \quad lb = l\mathsf{B} + \beta i,$$

also

$$la + lb = l(\mathsf{AB}) + (\alpha + \beta)i.$$

$la + lb$ ist der Hauptwert $l(ab)$ dann und nur dann, wenn

$$-\pi < \alpha + \beta \leqq \pi$$

ist. Unter dieser Bedingung gilt mithin die Formel

$$la + lb = l(ab). \tag{α}$$

Ferner ist

$$la - lb = l(\mathsf{A} : \mathsf{B}) + (\alpha - \beta)i.$$

$la - lb$ ist also der Hauptwert $l(a:b)$ dann und nur dann, wenn

$$-\pi < \alpha - \beta \leqq \pi \tag{β}$$

ist. Unter dieser Bedingung gilt mithin die Formel

$$la - lb = l(a:b). \tag{γ}$$

Die Beziehung (β) oder

$$\beta - \pi < \alpha \leqq \beta + \pi$$

zerfällt in zwei. Ist $\beta \geqq 0$, so muß

$$-(\pi-\beta)<\alpha\leqq\pi; \qquad (\delta)$$

ist $\beta<0$, so muß

$$-\pi<\alpha\leqq\pi+\beta \qquad (\varepsilon)$$

sein. Vgl. auch S. 361.

7*. Der Logarithmus als Funktion seines Argumentes.

Der Logarithmus ist eine unendlich-deutige Funktion seines Argumentes. Schreiben wir für letzteres anstatt a

$$x=\varrho\{\cos\theta+i\sin\theta\} \qquad (-\pi<\theta\leqq\pi),$$

so ist nach der Formel (6)

$$Lx=l\varrho+(\theta+2k\pi)i, \qquad (10)$$

unter k irgend eine ganze Zahl verstanden. Hierdurch ist der Logarithmus für alle Werte außer $x=0$ und $x=\infty$ erklärt. Da wie leicht mit Hilfe der Formel (10) zu sehen ist, $\lim\{1:Lx\}$ sowohl bei $\lim x=0$, als auch bei $\lim x=\infty$ Null ist, so setzt man

$$1:L0=0, \quad 1:L\infty=0 \quad \text{oder} \quad L0=\infty, \quad L\infty=\infty.$$

Aus der Formel

$$lx=l\varrho+\theta i \qquad (11)$$

erkennt man, daß der Hauptwert des Logarithmus von x in allen Punkten der x-Ebene mit Ausnahme derer der negativen reellen Achse eindeutig und stetig ist. Für einen Punkt $-\varrho$ $(\varrho>0)$ der letzteren hat man nach (11)

$$\lim_{x=-\varrho} lx=l\varrho+\pi i=l(-\varrho)$$

oder

$$\lim_{x=-\varrho} lx=l\varrho-\pi i=l(-\varrho)-2\pi i,$$

je nachdem x nichtnegativen oder negativen imaginären Teil hat. Der von den Hauptwerten des Logarithmus gebildete eindeutige Zweig desselben wird oft als der Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

Daß der Logarithmus eine monogene Funktion seines Argumentes ist, wird in Nr. 9* gezeigt werden. Ist das gemacht, so läßt sich ohne weiteres einsehen, daß der Logarithmus eine transzendente Funktion sein muß. Denn es gehören zu jedem Argumentwerte unzählig viele Funktionswerte.

Zum Beweise der Monogeneität des Logarithmus bedürfen wir des folgenden, auch an sich bemerkenswerten Satzes: „Wird eine beliebige Linie l vorgelegt, welche nur nicht durch die Punkte $x=0$ und $x=\infty$ gehen soll, so gibt es einen und nur einen, für jeden Punkt von l eindeutigen und dabei stetigen Zweig des Logarithmus, welcher in einem bestimmten Punkte a der Linie einen unter

den Werten von La vorgeschriebenen besitzt." Daß nur ein solcher Zweig möglich ist, folgt unmittelbar aus dem Satze S. 127. Wir haben also nur den Zweig des Logarithmus von der verlangten Beschaffenheit aufzustellen. Er sei mit $l_0 x$ bezeichnet, wobei x einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{l}$ bedeutet. a möge der Anfangspunkt von $\mathfrak{l}$ und ihm der Wert

$$l_0 a = la + 2k_0\pi i, \tag{12}$$

unter k_0 eine gegebene ganze Zahl verstanden, zugeordnet sein.

Hat die Linie $\mathfrak{l}$ mit der negativen reellen Achse keinen Punkt gemein, so dürfen wir

$$l_0 x = lx + 2k_0\pi i \tag{13}$$

setzen. Dieselbe Formel gilt auch dann, wenn $\mathfrak{l}$ mit dieser Halbachse Punkte $-\varrho$ gemein hat, sie jedoch nicht schneidet und zwar ganz auf derselben Seite der reellen Achse liegt, wie die positive imaginäre Achse. Wenn aber $\mathfrak{l}$ sich ganz auf der entgegengesetzten Seite der reellen Achse befindet, so können wir die Formel (13) nur für diejenigen Punkte von $\mathfrak{l}$ benutzen, welche nicht der negativen reellen Achse angehören. Für die Punkte $-\varrho$ auf derselben hat man zu setzen

$$l_0(-\varrho) = l(-\varrho) - 2\pi i + 2k_0\pi i.$$

Um die Erklärung von $l_0(x)$ im Falle, daß die Linie $\mathfrak{l} \equiv ab$ die negative reelle Achse OX' (Fig. 17) schneidet, bequemer geben zu können, unterscheiden wir positive und negative Schnitte[1]) der von a aus, also in einem bestimmten Sinne beschriebenen Linie $\mathfrak{l}$ mit der genannten Halbachse. Bezeichnen wir als positiv jene Seite des Halbstrahles OX', auf welcher seine positive Normale (S. 111) d. i. die negative imaginäre Achse OY' liegt, so nennen wir einen Schnitt von $\mathfrak{l}$ mit OX' im Falle, daß die Linie $\mathfrak{l}$ von der negativen auf die positive Seite von OX' tritt, positiv, im entgegengesetzten Falle negativ. Wenn eine einfache Linie $\mathfrak{l}$ die Halbachse OX' mehr-

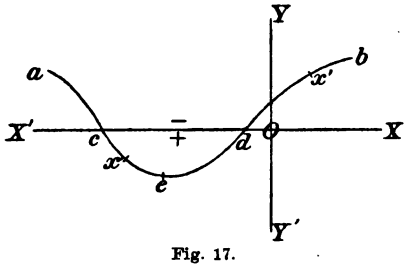


Fig. 17.

1) Der Schnitt von $\mathfrak{l}$ mit OX' braucht nicht ein Punkt zu sein; vielmehr kann die Linie $\mathfrak{l}$ nach dem Eintreffen in einem Punkte c von OX' ein Stück mit dieser Halbachse gemein haben, dieselbe also erst in einem von c verschiedenen Punkte verlassen. — Die Unterscheidung von positiven und negativen Schnitten einer Linie mit einem Halbstrahle (oder einer Richtung) rührt von Weierstraß her. Die Seiten „eines Halbstrahles" und die Seiten „einer Geraden" sind auseinander zu halten. Unter der letzteren versteht man einfach die beiden Felder, in welche die Ebene durch eine unbegrenzte Gerade zerfällt.

mals schneidet, so sind ihre Schnitte mit OX' abwechselnd positiv und negativ. So ist in Fig 17 c ein positiver, d ein negativer Schnitt. Um die verlangte Funktion $l_0 x$ zu finden, genügt die aus dem oben über lx Gesagten unmittelbar folgende Bemerkung, daß wenn lx von dem Punkte $x = c$ der Halbachse OX' aus längs einer auf der positiven Seite von OX' liegenden Linie ce stetig fortgesetzt werden soll, für die Punkte x derselben außer c je der Wert $lx + 2\pi i$ zu wählen ist und daß bei stetiger Fortsetzung von lx von einem Punkte e längs einer ebenfalls auf der positiven Seite von OX' liegenden Linie ed bis zum Punkte d von OX' einschließlich für diesen Punkt der Wert $ld - 2\pi i$ zu nehmen ist. Angenommen nun man habe die Funktion $l_0 x$ hergestellt für die Punkte von $\mathfrak{l}$ bis zu einem positiven Schnittpunkte c derselben mit OX', diesen eingeschlossen, so hat man nun bei stetiger Fortsetzung der genannten Funktion über c hinaus zu ihr $2\pi i$ zu addieren. Und wenn die Funktion $l_0 x$ als bekannt angesehen wird für alle Punkte von $\mathfrak{l}$ bis zu einem negativen Schnittpunkte d derselben mit OX', diesen ausgeschlossen, so hat man bei stetiger Fortsetzung dieser Funktion für den Punkt d (und darüber hinaus) von ihr $2\pi i$ abzuziehen. Hieraus ergibt sich, daß man im Falle daß der Punkt a der Halbachse OX' nicht angehört, für einen Punkt x', der ebenfalls nicht auf OX' liegt,

$$l_0 x' = lx' + 2k_0\pi i + 2h\pi i \tag{14}$$

zu setzen hat, wobei h den Unterschied: Anzahl der positiven Schnittpunkte des Stückes ax' von $\mathfrak{l}$ weniger der der negativen bedeutet. Die Formel (14) kann man auch dann benützen, wenn entweder einer oder beide Punkte a, x auf der Halbachse OX' liegen; nur muß man, wenn a zu OX' gehört und das unmittelbar darauf folgende Stück von $\mathfrak{l}$ auf der positiven Seite von OX' sich befindet, a zu den positiven Schnittpunkten von $\mathfrak{l}$ mit OX' — und wenn x' zu OX' gehört und das ihm unmittelbar vorhergehende Stück von $\mathfrak{l}$ auf der positiven Seite von OX' sich befindet, x' zu den negativen rechnen.

Darnach ist z. B. die Funktion $l_0 x$ für die Linie $\mathfrak{l}$ in Fig. 17 in folgender Weise zu erklären: Auf dem Stücke ac mit Einschluß von c ist $l_0 x = lx + 2k_0\pi i$, auf dem Stücke cd mit Ausschluß von d

$$l_0 x = lx + 2\pi i + 2k_0\pi i,$$

auf dem Stücke db mit Einschluß von d wieder $l_0 x = lx + 2k_0\pi i$.

Ist die Linie $\mathfrak{l}$ geschlossen, d. i. $b \equiv a$, so wird die Funktion $l_0 x$ im allgemeinen bei der Rückkehr nach a einen von $l_0 a$ verschiedenen Wert $l_1 a$ annehmen (S. 125). Und zwar hat man auf Grund der Formeln (12) und (14)

$$l_1 a = l_0 a + 2h\pi i. \tag{15}$$

8. Die allgemeine oder künstliche Potenz. Die Potenzfunktion.

Den in Nr. 3 aufgestellten Forderungen genügt jede Funktion e^{xLa}, wo La irgend einen fest gewählten natürlichen Logarithmus von a bedeutet, und nur eine von diesen Funktionen (vgl. S. 343). Die zu einem bestimmten Werte von x gehörigen Werte der Funktionen e^{xLa} bilden die allgemeine Potenz a hoch x, deren Zeichen $(\!(a)\!)^x$ sei, so daß

$$(\!(a)\!)^x = e^{xLa} = e^{xla} \cdot e^{2k\pi xi} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

ist. Insbesondere hat man wegen $Le = 1 + 2k\pi i$

$$(\!(e)\!)^x = e^{xLe} = e^x \cdot e^{2k\pi xi}.$$

e^{xla} heißt Hauptwert der Potenz a hoch x. Unter a^x wollen wir stets den Hauptwert der Potenz a hoch x verstehen. Bei reellem x hat a^x die nämliche Bedeutung wie in Nr. 1; insbesondere hat bei positivem reellen a das Zeichen a^x denselben Sinn, wie bisher, d. i. wie in der reellen Arithmetik.

Setzt man

$$x = \xi + \eta i, \quad a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad (-\pi < \alpha \leqq \pi)$$
$$La = lA + \alpha' i,$$

wo α' an Stelle von $\alpha + 2k\pi$ steht, so hat man

$$xLa = \xi lA - \eta\alpha' + (\xi\alpha' + \eta lA)\, i,$$

also für die allgemeine Potenz

$$(\!(a)\!)^x = A^\xi(\cos\xi\alpha' + i\sin\xi\alpha') \cdot e^{-\eta\alpha'}(\cos\eta lA + i\sin\eta lA).$$

Daraus ist zu entnehmen, daß von den in der Formel (19) von Nr. 2 vorkommenden unbestimmten Konstanten B einen der Werte $e^{-(\alpha+2k\pi)}$, β' den Wert lA erhalten muß, damit die Funktion $f(\xi + \eta i)$ a. a. O. von ξ, η eine monogene Funktion von $x = \xi + \eta i$ werde.

Die Änderungen, welche die bekannten Sätze über die Potenzen durch die nunmehrige Vieldeutigkeit derselben erleiden, sind in Arithmetik XII. 9 genau angegeben. Für die Hauptwerte bei beliebigen Exponenten x, y gültig bleiben nur die Formeln

$$a^{-x} = 1 : a^x, \qquad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad a^x : a^y = a^{x-y}.$$

Ferner besteht, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, stets die Formel

$$(a^x)^m = a^{mx}.$$

Alle diese Formeln ergeben sich unmittelbar aus dem Begriffe der bezüglichen Hauptwerte.

0^x ist 0 oder ∞, je nachdem der reelle Teil von x positiv oder negativ ist. $0^{\eta i}$ bleibt unbestimmt. ∞^x ist ∞ oder 0, je nachdem der reelle Teil von x positiv oder negativ ist. $\infty^{\eta i}$ bleibt wieder unbestimmt.

Die Werte $(\!(x)\!)^s = e^{sLx}$ bilden bei konstantem s und veränderlichem x die Potenzfunktion. Sie ist zufolge des Satzes b) S. 326 eine monogene Funktion, da dies von Lx gilt (S. 360). Ist s eine ganze Zahl, so fällt die Potenzfunktion mit dem rationalen Ausdrucke x^s bezw. $1 : x^{-s}$ zusammen. Ist s eine gebrochene rationale Zahl m/n, so ist $(\!(x)\!)^s$ eine algebraische Funktion von x, nämlich $(\sqrt[n]{*x})^m$. Ist endlich s eine nicht-rationale Zahl, so ist die Potenzfunktion unendlichdeutig und daher sicher transzendent. — Der Hauptwert $x^s = e^{slx}$ verhält sich bei nicht ganzem s hinsichtlich der Stetigkeit gerade so, wie die Funktion lx, ist also stetig in allen Punkten der x-Ebene mit Ausschluß derer der negativen reellen Achse.

In der nächsten Nr. werden wir die Hauptwerte $(1+x)^s$ und $l(1+x)$ für die x, deren Betrag kleiner als 1 ist, in ganze Potenzreihen von x entwickeln. Hierauf werden wir in Nr. 9* beweisen, daß aus der für lx unter der Voraussetzung, daß $|x-1|<1$ ist, gewonnenen Potenzreihe alle Werte der Funktion Lx sich herleiten lassen. Damit ist, wie schon bemerkt, auch die Monogeneïtät der Potenzfunktion $(\!(x)\!)^s$ dargetan.

9. Die binomische und die logarithmische Reihe.[1])

Wir gehen nun zu der zuerst von Abel vollständig gelösten Aufgabe über: „den Grenzwert der unendlichen Reihe

$$s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots + s_n x^n + \cdots, \tag{1}$$

worin

$$s_0 = 1, \quad s_n = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

ist (unter s irgend eine von Null verschiedene Zahl $\mu + \nu i$ verstanden), zu bestimmen für jeden Wert von x, wofür sie konvergiert". Statt s_n schreibt man auch $\binom{s}{n}$.

Die Entscheidung über das Verhalten der, wenn s nicht eine natürliche Zahl ist, unendlichen Potenzreihe (1) liefert der Satz von Weierstraß in VI. 14, zu dessen Beweise wir übrigens der Kenntnis ihrer Divergenz im Falle daß

$$x = -1, \qquad \mu \leqq 0$$

ist, bedurften. Da nämlich

$$\frac{(-1)^n s_n}{(-1)^{n-1} s_{n-1}} = 1 - \frac{s+1}{n} = 1 - \frac{(\mu+1)+\nu i}{n}$$

ist, so ergibt sich nach diesem Satze folgendes.

---

1) Das Eulersche Verfahren, die Binomialreihe zu summieren, wurde von Cauchy 1821 (Oeuvres 2. s. III p. 243) auf komplexe Werte des Argumentes x und von Abel 1826 (Oeuvres par Lie et Sylow I. p. 226 f.) auch auf komplexe Werte des Exponenten ausgedehnt. Damit ermittelte Abel zugleich eine Lösung der in Nr. 3 behandelten Aufgabe bei der Annahme $x = s$, $a = 1 + x$. — Die Entwicklung von $l(1+x)$ nach Cauchy a. a. O. p. 447.

„Der Konvergenzkreis der binomischen Reihe hat den Radius 1. Auf dem Kreise selbst zeigt die Reihe nachstehendes Verhalten.

I. Ist $\mu < -1$, so ist

$$\lim |s_n| \quad \text{bei} \quad \lim n = +\infty$$

unendlich. Die Reihe divergiert für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 ist, unbedingt.

II. Ist $\mu = -1$ und $\nu \gtrless 0$, so hat $|s_n|$ einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwert bei

$$\lim n = +\infty,$$

$(-1)^n s_n$ selbst aber keinen.

Ist $\mu = -1$, $\nu = 0$, so hat man $s_n = (-1)^n$.

Die Reihe divergiert für alle x vom absoluten Betrage 1 unbedingt.

III. Ist $\mu > -1$, so ist $\lim s_n = 0$.

1) Ist $0 \geqq \mu > -1$, so konvergiert die Reihe (1) für alle x vom absoluten Betrage 1 außer $x = -1$. Falls $x = -1$ ist, die Reihe (1) also divergiert, so liegen ihre Partialsummen dem absoluten Betrage nach dann und nur dann unter einer positiven Zahl, wenn $\mu = 0$, $\nu \gtrless 0$ ist.

2. Ist $\mu > 0$, so konvergiert die Reihe (1) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 ist, und zwar absolut.

Nachdem das Verhalten der binomischen Reihe festgestellt ist, können wir obige Aufgabe lösen mit Hilfe des Satzes am Anfange von Nr. 8.

Satz. Für diejenigen Werte von x, wofür die binomische Reihe (1) konvergiert, ist ihr Grenzwert der Hauptwert der Potenz $(1+x)^s$

$$(1+x)^s \quad \text{d. i.} \quad e^{s\,l(1+x)}.$$

Hieran schließt sich unmittelbar der Satz: Für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, außer $x = -1$, konvergiert die unendliche Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \tag{2}$$

und hat zum Grenzwert den Hauptwert von $L(1+x)$

$$l(1+x),$$

welcher bei der angegebenen Beschränkung von x die Eigenschaft hat, daß der Koeffizient von i zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt.

Der Beweis des ersteren Satzes wird ähnlich geführt, wie der des entsprechenden Satzes für reelle x und s in Arithmetik IX. 15.

Falls die Reihe (1) konvergiert, werde ihr Grenzwert mit $\varphi(s, x)$ bezeichnet. Man hat dann

$$\varphi(s, x)\, \varphi(s', x) = \varphi(s + s', x)$$

unter der Voraussetzung, daß die Reihe (1) sowie die beiden aus ihr dadurch hervorgehenden, daß s durch s' und $s + s'$ ersetzt wird, konvergieren. Diese Gleichung folgt aus dem Additionstheoreme der Binomialkoeffizienten d. i. der Formel

$$\sum_0^n {}_r s_r\, s'_{n-r} = \binom{s + s'}{n}. \tag{3}$$

Dieser Satz wurde a. a. O. durch den Schluß von n auf $n + 1$ bewiesen. Tiefer in das Wesen der Sache dringt die folgende Überlegung. Da, wenn s eine natürliche Zahl m ist, $\varphi(m, x) = (1 + x)^m$ ist, so erkennt man unmittelbar, daß, wenn auch m' eine natürliche Zahl bedeutet,

$$\varphi(m, x)\, \varphi(m', x) = \varphi(m + m', x)$$

ist. Entwickelt man die linke Seite dieser Gleichung nach Potenzen von x und setzt die Koeffizienten von x^n auf beiden Seiten derselben einander gleich, so erhält man die Formel

$$\sum_0^n {}_r m_r\, m'_{n-r} = \binom{m + m'}{n}.$$

Es gilt somit die Formel (3) stets, wenn s und s' beide natürliche Zahlen m, m' sind. Demnach stimmen die ganzen Funktionen von s und s', welche auf den beiden Seiten der Gleichung (3) stehen und sowohl in s, als auch in s' je vom n^{ten} Grade sind, für alle Systeme s, s', welche beide natürliche Zahlen sind, somit für unbegrenzt viele Wertsysteme überein; sie sind mithin nach dem 5. Satze in IV. 2 identisch.

Erteilt man x irgend einen Wert, dessen absoluten Betrag kleiner als 1 ist, so läßt sich $\varphi(s, x)$ in eine beständig konvergente ganze Potenzreihe von s verwandeln. Dies wird mit Hilfe des Cauchyschen Doppelreihensatzes (Arithmetik, S. 254, 390) gezeigt und zwar genau so, wie es in Arithmetik S. 266 für reelle Werte von x und s gemacht ist. Multipliziert man das Produkt $s(s-1)\cdots(s-n+1)$ aus, so erhält man

$$s_n = (-1)^{n-1}\frac{s}{n} + (-1)^{n-2} a_{n,2}\, s^2 + \cdots + (-1)^{n-r} a_{n,r}\, s^r + \cdots + \frac{s^n}{n!},$$

worin die $a_{n,r}$ positive Zahlen sind. Dann konvergieren absolut die unendlichen Reihen

$$\sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-r} a_{n,r}\, x^n, \qquad (r = 2, 3, \cdots)$$

und wenn wir ihre Summen bezw. mit X_1, X_r bezeichnen, so finden

wir für jeden Wert von s

$$\varphi(s, x) = 1 + X_1 s + X_2 s^2 + \cdots \qquad (|x| < 1). \tag{4}$$

Bemerken wir endlich noch, daß $\varphi(1, x) = 1 + x$ ist, so sehen wir, daß $\varphi(s, x)$ als Funktion von s betrachtet, den drei in Nr. 3 an die Funktion $f(x)$ gestellten Forderungen entspricht; wir haben dabei nur $x = s$, $a = 1 + x$ zu denken. Demnach muß

$$\varphi(s, x) = e^{s L(1+x)} \qquad (|x| < 1) \tag{5}$$

sein, wobei $L(1 + x)$ einen noch zu ermittelnden eindeutigen Zweig des Logarithmus von $1 + x$ bedeutet.

Aus der Vergleichung der in den Formeln (4) und (5), die letztere in der Form

$$\varphi(s, x) = 1 + L(1 + x)s + \frac{L(1+x)^2}{2!} s^2 + \cdots$$

geschrieben, befindlichen ganzen Potenzreihen von s, ergibt sich die Gleichung

$$L(1 + x) = X_1 = \sum_1^\infty {}_n \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \tag{5*}$$

worin x auf die Werte, deren Betrag kleiner als 1, zu beschränken ist.

Zufolge der Formel (5*) ist $L(1 + x)$ für die reellen Werte von x, deren Betrag kleiner als 1 ist, reell, somit dem Hauptwert $l(1 + x)$ gleich. Da wir nun wissen, daß für jedes x, dessen Betrag kleiner als 1 ist, einerseits $L(1 + x)$ als Summe der ganzen Potenzreihe in (5*) nach V. 4, andererseits $l(1 + x)$ nach S. 352 stetig ist, so können wir nach dem Satze S. 127 schließen, daß dafür die Gleichung $L(1 + x) = l(1 + x)$ besteht. Wir sind demnach zur Formel gelangt

$$l(1 + x) = \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1). \tag{a}$$

Diese Gleichung gilt auch für jene x vom Betrage 1, wofür die Reihe rechts in (a) konvergiert, also für alle diese x außer $x = -1$. Lassen wir nämlich r einen solchen Wert von x sein, so haben wir wegen der Stetigkeit von $l(1 + x)$ bei $x = r$

$$\lim_{x=r} l(1 + x) = l(1 + r).$$

Andererseits ist nach einem Satze S. 287

$$\lim_{x=r} \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1} \frac{r^n}{n}.$$

Da laut der Formel (a) die linken Seiten dieser beiden Gleichungen

einander gleich sind, so sind es auch die rechten d. i. es ist auch

$$l(1+r) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}. \qquad \text{(b)}$$

Setzt man

$$x = \varrho\{\cos\theta + i\sin\theta\}, \quad 1+x = \sigma(\cos\psi + i\sin\psi) \quad (-\pi < \psi \leqq \pi), \qquad \text{(c)}$$

so daß

$$\sigma\cos\psi = 1 + \varrho\cos\theta, \qquad \sigma\sin\psi = \varrho\sin\theta \qquad \text{(d)}$$

ist, so erweist sich bei Ausschluß des Wertes $x = -1$ (d. i. $\varrho = 1$, $\theta = \pi$) $\cos\psi$ als positiv; folglich liegt ψ zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$. ψ ist aber die zweite Koordinate von $l(1+x) = l\sigma + \psi i$.

Da somit in (5) $L(1+x) = l(1+x)$ zu setzen ist, so ergibt sich schließlich die Formel

$$\varphi(s, x) = e^{sl(1+x)} = (1+x)^s, \qquad \text{(e)}$$

d. h. $\varphi(s, x)$ ist der Hauptwert der Potenz $(1+x)$ hoch s. Daß die Gleichung (e) auch für jene Werte vom Betrage 1, wofür die binomische Reihe konvergiert, gilt, wird auf ähnliche Weise, wie die Formel (b), bewiesen.

9*. Der Logarithmus Lx eine monogene Funktion von x.

Schreiben wir in der Formel (a) x anstatt $1+x$, so geht sie über in

$$lx = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}. \qquad \text{(f)}$$

Diese Gleichung gilt für alle x der Fläche des vom Punkte $+1$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises (Fig. 18) mit Ausnahme von $x = 0$.

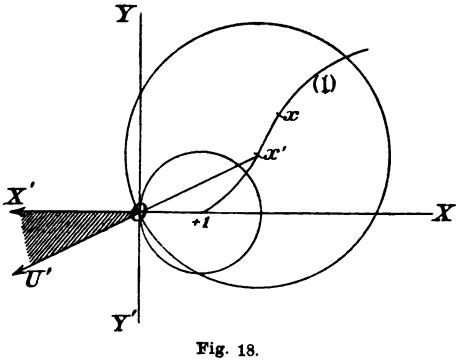


Fig. 18.

Wir haben jetzt noch zu zeigen, daß aus der ganzen Potenzreihe auf der rechten Seite von (f) die unendlichdeutige Funktion Lx entspringt. Hierzu ist der Nachweis erforderlich, daß (S) „der eindeutige und stetige Zweig l_0x dieser Funktion, welcher auf einer gegebenen, von a ausgehenden und die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ nicht enthaltenden Linie $\mathfrak{l}$ dadurch bestimmt wird, daß dem Punkte a der Wert l_0a von La zugeordet wird (S. 353, Fig. 17), in jedem Punkte x dieser Linie holomorph ist".

Bezeichnet x' einen Punkt von $\mathfrak{l}$, der nicht der negativen reellen Achse angehört, so haben wir nach der Formel (14) S. 354

$$l_0 x' = lx' + 2k_0\pi i + 2h\pi i. \tag{g}$$

Nehmen wir den Punkt x auf $\mathfrak{l}$ so nahe an x', daß das Stück xx' die Halbachse OX' nicht schneidet, so ist

$$l_0 x = lx + 2k_0\pi i + 2h\pi i.$$

Demnach haben wir

$$l_0 x - l_0 x' = lx - lx'. \tag{h}$$

Nun ist nach der Formel (γ) S. 351

$$lx - lx' = l(x : x'), \tag{i}$$

wenn die Anomalien θ, θ' von x und x', beide zwischen $-\pi$ und π gewählt, den Bedingungen genügen:

$$\theta' \geqq 0, \quad -(\pi - \theta') < \theta \leqq \pi \tag{k}$$

$$\theta' < 0, \quad -\pi < \theta \leqq \pi + \theta'. \tag{l}$$

Ist x' reell und positiv, also $\theta' = 0$, so darf mithin x jeder Punkt außer $x = 0$ sein. Ist x' nicht reell, so werden durch die Beziehungen (k) (l) diejenigen Punkte bestimmt, welche außerhalb des hohlen Winkels liegen, der von der Halbachse OX' und der Verlängerung von Ox' über O hinaus gebildet wird [$X'\widehat{O}U'$ in Fig. 18 [1])] und dazu, je nachdem die zweite Koordinate von x' positiv oder negativ ist, die Punkte der Halbachse OX' oder der genannten Verlängerung. Unter diesen Beschränkungen von x besteht zufolge der Formeln (h) und (i) die folgende

$$l_0(x) - l_0(x') = l(x : x'). \tag{m}$$

Nach der Formel (f) hat man

$$l(x : x') = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x - x'}{x'}\right)^n, \tag{n}$$

wofern der Punkt x die Bedingung, daß

$$|x - x'| < |x'| \tag{p}$$

ist, erfüllt d. i. innerhalb des Kreises liegt, welcher von x' aus durch den Punkt $x = 0$ gelegt wird. Falls die erste Koordinate von x' nicht negativ ist, so gehören, wie Fig. 18 zeigt, diese Punkte sämtlich zu den oben dem x angewiesenen. Ist sie aber negativ (Fig. 19), so tritt der Kreis $(x', |x'|)$ in den ausgeschlossenen Winkel $X'\widehat{O}U'$ ein.

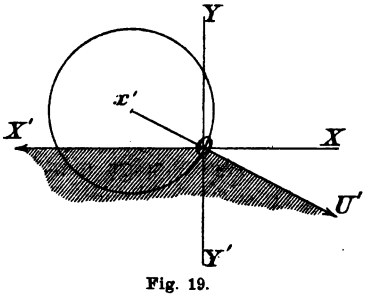


Fig. 19.

1) In Fig. 18 ist $a = 1$ genommen.

Aus den Formeln (m) und (n) ergibt sich die Entwicklung

$$l_0 x - l_0 x' = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-x'}{x'}\right)^n. \qquad (q)$$

Und zwar gilt sie, wenn die erste Koordinate von x' nicht negativ ist, für alle der Ungleichung (p) entsprechenden Punkte, wenn sie negativ ist, nur für jene von ihnen, welche auf derselben Seite der reellen Achse liegen, wie x' selbst, und falls die zweite Koordinate von x' positiv ist, auch für die Punkte der in die Halbachse OX' fallende Sehne des Kreises $(x', |x'|)$ außer $x = 0$. Aus der Formel (q) ist demnach ersichtlich, daß die Funktion $l_0 x$ bei $x = x'$ holomorph ist.

Nunmehr sei x' ein Punkt der Halbachse OX', also $x' = -\varrho'$ $(\varrho' > 0)$. Alsdann ist $\theta' = \pi$ und die Beziehung (k) geht über in: $0 < \theta \leqq \pi$. Die Formeln (i) bis (q) gelten mithin bloß für die x, deren zweite Koordinate positiv ist, und für die negativen x. Liegen in der Nachbarschaft von x' keine Punkte von $\mathfrak{l}$ auf der positiven Seite von OX', so kommen nur Punkte x von der soeben genannten Art in Betracht. Tritt aber die Linie $\mathfrak{l}$ hinter x' auf die positive Seite von OX', z. B. ist x' ein positiver Schnittpunkt von $\mathfrak{l}$ mit OX', so gilt zwar noch die Formel (g), aber für die Punkte x von $\mathfrak{l}$ auf der positiven Seite von OX' hat man

$$l_0 x = l_0 x + 2k_0\pi + 2h\pi i + 2\pi i,$$

so daß jetzt

$$l_0 x - l_0 x' = lx - lx' + 2\pi i$$

ist. Wir finden nun nach (c)

$$lx - lx' = (l\varrho + \theta i) - (l\varrho' + \pi i) = l(\varrho : \varrho') + (\theta - \pi)i,$$

also, da θ hier negativ, somit $\theta - \pi < -\pi$ ist,

$$lx - lx' + 2\pi i = l(x : x').$$

Demnach erhalten wir neuerdings die Formel (m). Es besteht also auch für die x mit negativer zweiter Koordinate die Reihenentwicklung (q), wofern nur $|x - x'| < |x'|$ ist. Mithin hat die Funktion $(l_0(x$ im Punkte x' ebenfalls den Charakter einer ganzen. — Auf ähnliche Weise zeigt man, daß dies auch stattfindet im Falle, daß die Linie $\mathfrak{l}$ sich vor dem Punkte x' auf der positiven Seite von OX' befindet.

Damit ist der Satz (S) S. 360 vollständig bewiesen.

Betrachten wir jetzt die Linien $\mathfrak{l}$, die vom Punkte $+1$ ausgehen (Fig. 18). Auf jeder von ihnen gibt es eine Funktion $l_0 x$, welche für $x = 1$ verschwindet und in allen ihren Punkten holomorph ist. Folglich läßt sich eine jede solche Funktion nach dem 4. Satze in

VII. 3 aus dem Funktionselemente (f) durch das wiederholte Verfahren der Ableitung herstellen. Mithin bilden die Werte Lx eine monogene Funktion, deren singuläre Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ sind.

Aus der Formel (q) folgt nach V. 8, daß in sämtlichen Punkten x' von l

$$D_x l_0 x' = 1 : x'$$

ist. Insbesondere hat man in allen Punkten x außer denen der Halbachse OX'

$$D_x lx = 1 : x.$$

10. Zerlegung der binomischen und der logarithmischen Reihe in den reellen und imaginären Teil.

Wird in die binomische und logarithmische Reihe

$$x = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$x^n = \varrho^n\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}$$

eingeführt und sowohl ein jedes Glied der Reihe, als auch die Summe in den reellen und imaginären Teil zerlegt, so erhält man Entwicklungen für gewisse reelle Funktionen von ϱ, θ, welche nach ganzen positiven Potenzen von ϱ und nach den Kosinus und Sinus der Vielfachen von θ fortschreiten. Dabei möge θ im Intervalle

$$[(2m-1)\pi,\quad (2m+1)\pi]\quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

gewählt sein.

Zufolge der Formeln (c) und (d) in Nr. 9 ist

$$\sigma = (1 + 2\varrho\cos\theta + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \psi = \arctan\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta} \qquad (5^{**})$$

$$l(1+x) = l\sigma + \psi i.$$

Beschränken wir uns auf den Fall, daß s eine reelle Zahl μ ist, so haben wir

$$(1+x)^\mu = e^{\mu l(1+x)} = e^{\mu(l\sigma+\psi i)} = \sigma^\mu\{\cos\mu\psi + i\sin\mu\psi\}.$$

Dann liefert die binomische Reihe (1) durch Zerlegung in den reellen und imaginären Teil die Formeln

$$\begin{aligned}(1 + 2\varrho\cos\theta + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}\cos\mu\left\{\arctan\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta}\right\} &= 1 + \sum_1^\infty{}_n \mu_n \varrho^n \cos n\theta,\\ (1 + 2\varrho\cos\theta + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}}\sin\mu\left\{\arctan\frac{\varrho\sin\theta}{1+\varrho\cos\theta}\right\} &= \sum_1^\infty{}_n \mu_n \varrho^n \sin n\theta,\end{aligned} \qquad (6)$$

welche, falls $\varrho < 1$ ist, für jeden Wert von θ gelten. Ist $\varrho = 1$, so sind die Formeln (6) sicher richtig, wenn die Binomialreihe kon-

vergiert. Demnach bestehen bei positivem μ für jeden der genannten Werte von θ die Formeln

$$\left[2(-1)^m \cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu \cos\mu\left(\frac{\theta}{2} - m\pi\right) = 1 + \sum_1^\infty \mu_n \cos n\theta,$$
$$\left[2(-1)^m \cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu \sin\mu\left(\frac{\theta}{2} - m\pi\right) = \sum_1^\infty \mu_n \sin n\theta. \tag{7}$$

Ist $0 > \mu > -1$, so gelten sie für alle Werte von θ außer $\theta = (2m \pm 1)\pi$. Für $\theta = (2m \pm 1)\pi$ divergiert die Reihe rechts in der ersten Formel; die in der zweiten konvergiert zwar zum Grenzwerte Null, aber es ist die linke Seite unendlich. Die zweite Reihe konvergiert für die Werte von θ in jedem Intervalle

$$[(2m \pm 1)\pi \mp \delta,\ (2m \pm 1)\pi] \qquad (\delta > 0)$$

ungleichmäßig, da ihre Summe bei

$$\lim \theta = (2m \pm 1)\pi \mp 0$$

einen unendlichen Grenzwert hat. Ist $\mu \leqq -1$, so haben die Formeln (7) für keinen Wert von θ einen Sinn.

Aus (7) hat Abel[1]) Formeln abgeleitet, wovon die Formeln für $\cos\theta^m$ und $\sin\theta^m$ „(Arithmetik" S. 354) besondere Fälle sind. Multipliziert man die erste der Gleichungen (7) mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ und addiert, so erhält man

$$\left[2(-1)^m \cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu \cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\mu\theta + \mu m\pi) = \sum_0^\infty \mu_n \cos(\alpha - n\theta).$$

Daraus ergeben sich die in Rede stehenden Formeln durch die Substitutionen

$$\left.\begin{array}{ll}\theta = 2\varphi & \alpha = \mu\varphi \\ \theta = 2\varphi & \alpha = \mu\varphi + \frac{1}{2}\pi\end{array}\right\} \qquad \left(m\pi - \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq m\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\left.\begin{array}{ll}\theta = 2\varphi - \pi & \alpha = \mu\varphi \\ \theta = 2\varphi - \pi & \alpha = \mu\varphi - \frac{1}{2}\pi\end{array}\right\} \qquad (m\pi \leqq \theta \leqq m\pi + \pi).$$

Die Formeln (6) gehen für $\theta = \frac{\pi}{2}$ über in

$$(1 + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}} \cos(\mu \operatorname{arc\,tan} \varrho) = 1 + \sum_1^\infty (-1)^k \binom{\mu}{2k} \varrho^{2k}$$
$$(1 + \varrho^2)^{\frac{\mu}{2}} \sin(\mu \operatorname{arc\,tan} \varrho) = \sum_0^\infty (-1)^k \binom{\mu}{2k+1} \varrho^{2k+1}.$$

Sie stellen die Koordinaten des Hauptwertes von $(1 + \varrho\, i)^\mu$, der für

1) Vgl. Abel, Oeuvres I. p. 248.

$\mu = 1 : m$ mit dem von $\sqrt[m]{1 + \varrho i}$ zusammenfällt, als Potenzreihen von ϱ dar, wenn ϱ kleiner, bezw. gleich 1 ist.[1])

Aus der logarithmischen Reihe erhält man auf ähnliche Art die Formeln

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} l(1 + 2\varrho \cos\theta + \varrho^2) &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \varrho^n \cos n\theta, \\ \arctan \frac{\varrho \sin\theta}{1 + \varrho\cos\theta} &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \varrho^n \sin n\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

gültig, falls $\varrho < 1$ ist, für jeden Wert von θ. Ist $\varrho = 1$, so bestehen sie für alle Werte von θ außer $\theta = (2m + 1)\pi$. Man hat also, wenn $(2m - 1)\pi < \theta < (2m + 1)\pi$ ist,

$$\begin{aligned} l[2(-1)^m \cos \tfrac{1}{2}\theta] &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos n\theta, \\ \frac{\theta}{2} - m\pi &= \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\theta. \end{aligned}$$

Für $\theta = (2m \pm 1)\pi$ divergiert die Reihe in der ersten dieser Formeln, die in der zweiten konvergiert zwar, aber zum Grenzwerte Null, nicht $\pm\frac{\pi}{2}$.[2]) Daraus schließt man, daß die letztere Reihe für die Werte von θ in jedem der Intervalle $[(2m \pm 1)\pi \mp \delta,\ (2m \pm 1)\pi]$ ungleichmäßig konvergiere (S. 83).

11. Der Arcus tangens.

Aus der Gleichung

$$x = \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = i\frac{e^{-yi} - e^{yi}}{e^{-yi} + e^{yi}} = i\frac{e^{-2yi} - 1}{e^{-2yi} + 1}$$

folgt

$$1 - xi = (1 + xi)e^{-2yi}.$$

Ist $x = i$ oder $-i$, so hat diese Gleichung keine Wurzel nach y. Wenn aber x von $\pm i$ verschieden ist, so hat man

$$y = \operatorname{Arc}\tan x = \tfrac{1}{2} i L\frac{1 - xi}{1 + xi}. \tag{9}$$

Unter den unbegrenzt vielen Werten des Arcus tangens, von denen sich je zwei um ein Vielfaches von π unterscheiden, heißt Hauptwert derjenige, welcher dem Hauptwerte des Logarithmus in (9)

---

1) Die Formeln (6) gelten auch für nicht-reelle Werte von μ und ϱ, wenn nur der Betrag von ϱ kleiner als 1 ist. Auch die Formeln (8) gelten für die soeben genannten Werte von ϱ. Vgl. Übung (12) zum VIII. Abschn. und S. 379.

2) Vgl. Abel, Oeuvres I. p. 225.

entspricht, dessen reelle Koordinate mithin zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, bezw. $\frac{\pi}{2}$ ist. Er wird mit arc tan bezeichnet, während Arc tan einen beliebigen Wert der Funktion bedeutet. Es ist mithin

$$\text{Arc tan } x = \text{arc tan } x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$\text{arc tan } x = \tfrac{1}{2} i l \frac{1 - xi}{1 + xi}. \tag{10}$$

Der für alle x mit Ausschluß von $x = \pm i$ eindeutig erklärte Hauptwert der Arcus-tangens-Funktion, der sogenannte **Hauptzweig** derselben, ist stetig in allen Punkten der x-Ebene mit Ausnahme der beiden Halbstrahlen, welche von der imaginären Achse nach Ausscheidung der Strecke $(-i, +i)$ übrig bleiben. Der Logarithmus in (10) ist nämlich außer dort, wo sein Argument Null oder unendlich ist, nur da unstetig, wo dasselbe negativ ist, also für jene Punkte x, wofür

$$\frac{1 - xi}{1 + xi} = -\tau \qquad (\tau > 0)$$

ist, d. i. für

$$x = \frac{\tau + 1}{\tau - 1} i.$$

Diese x liegen auf der imaginären Achse und zwar erfüllen sie die positive Halbachse von $+i$ ins Unendliche (entsprechend den Werten $\tau > 1$) und die negative von $-i$ ins Unendliche (entsprechend den Werten $0 < \tau < 1$). Um zu erkennen, auf welcher Seite dieser Halbstrahlen der arc tan x unstetig ist, setzen wir im Argumente des Logarithmus in (10) $x = \xi + \eta i$, unter η eine Zahl > 1 oder < -1 verstanden. Dann wird

$$\frac{1 - xi}{1 + xi} = \frac{1 + \eta - \xi i}{1 - \eta + \xi i} = \frac{1 - \eta^2 - \xi^2 - 2\xi i}{(1 - \eta)^2 + \xi^2}.$$

Da nun $l(v + \omega i)$, falls $v < 0$ ist, nach der Seite der negativen ω unstetig ist, so ist es der arc tan x auf der Seite jener Halbstrahlen, wo $\xi > 0$ ist, d. i. auf der negativen Seite (S. 353) des ersteren und der positiven des letzteren, und zwar springt er in einem positiven (negativen) Schnittpunkte des letzteren (ersteren) Halbstrahles um $\frac{i}{2}(-2\pi i) = \pi$. — Man findet aus (10), falls $\eta^2 > 1$ ist,

$$\text{arc tan } \eta i = \frac{i}{2} l \frac{\eta + 1}{\eta - 1} - \frac{\pi}{2}, \tag{a}$$

falls $\eta^2 < 1$:

$$\text{arc tan } \eta i = \frac{i}{2} l \frac{1 + \eta}{1 - \eta}. \tag{b}$$

Die Formel (10) kann, die Punkte x auf dem Stücke der positiven imaginären Achse von $+i$ ins Unendliche ausgenommen, ersetzt werden durch die folgende

$$\text{arc tan } x = \frac{i}{2}\{l(1 - xi) - l(1 + xi)\}. \tag{10*}$$

In den ausgeschlossenen Punkten muß rechts π abgezogen werden. — Die Formel (10*) ist für $x = 0$ richtig; sie gilt also nach dem Satze S. 127 sicher für alle x, wofür die Hauptwerte

$$l[(1 - xi) : (1 + xi)], \qquad l(1 - xi), \qquad l(1 + xi)$$

stetig sind, mithin für alle x, die nicht auf der imaginären Achse außerhalb der Strecke $(-i, +i)$ liegen. Sie besteht, wie man sich durch die Einsetzung $x = \eta i$ unmittelbar überzeugen kann, auch falls $\eta < -1$ ist. Ist aber $\eta > 1$, so hat man nach (a)

$$\operatorname{arc\,tan} \eta i = \frac{i}{2}[l(1 + \eta) - l(1 - \eta)] - \pi.$$

Setzt man in der Formel (10*) für $l(1 + xi)$ und $l(1 - xi)$ die aus der Reihe (a) S. 359 sich dadurch, daß man x durch xi und $-xi$ ersetzt, ergebenden Reihen unter, so findet man die Entwicklung

$$\operatorname{arc\,tan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{11}$$

Die ganze Potenzreihe in (11), welche für alle Werte von x, deren Betrag 1 nicht übersteigt, ausgenommen $x = \pm i$, konvergiert, stellt den Hauptwert $\operatorname{arc\,tan} x$ dar. Ist $|x| < 1$, so liegt seine reelle Koordinate zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$, und ist $|x| = 1$, so ist sie entweder $+\frac{\pi}{4}$ oder $-\frac{\pi}{4}$, in beiden Fällen je nachdem die reelle Koordinate von x positiv oder negativ ist.[1])

Da, wenn u nicht negativ ist, $l(1 : u) = -lu$ ist, so ersehen wir aus der Formel (10), daß die beiden oben erwähnten Halbstrahlen in der imaginären Achse abgerechnet, stets

$$\operatorname{arc\,tan}(-x) = -\operatorname{arc\,tan} x$$

ist. Dagegen ist für $\eta^2 > 1$ zufolge der Formel (a)

$$\operatorname{arc\,tan} \eta i + \operatorname{arc\,tan}(-\eta i) = -\pi.$$

Ist x weder 0 noch ∞, so hat man

$$\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,tan}(1 : x) = \frac{\pi}{2} \text{ oder } -\frac{\pi}{2}, \tag{11*}$$

je nachdem die reelle Koordinate von x positiv ist oder nicht. Da diese Beziehungen für reelle Werte von x zufolge der Erklärung von $\operatorname{arc\,tan} x$ und $\operatorname{arc\,tan}(1 : x)$ (S. 49) bestehen und $\operatorname{arc\,tan}(1 : x)$ in der Strecke $(-i, +i)$, $\operatorname{arc\,tan} x$ dagegen in den übrigen Punkten der imaginären Achse unstetig ist, so muß die Summe $\operatorname{arc\,tan} x + \operatorname{arc\,tan}(1 : x)$ in der Halbebene der positiven ersten Ko-

1) Die Bemerkung über die reelle Koordinate von $\operatorname{arc\,tan} x$ ergibt sich leicht aus der Formel (10) entweder durch Rechnung (indem man $x = \varrho[\cos\theta + i \sin\theta]$ setzt) oder aus der Konstruktion der Vektoren $1 - xi$ und $1 + xi$, $|x| \leqq 1$ angenommen.

ordinate von x durchaus gleich $\frac{\pi}{2}$, in der Halbebene der negativen ersten Koordinate von x durchaus gleich $-\frac{\pi}{2}$ sein. Für $x = \eta i$ und $\eta^2 > 1$ erhält man sie aus der Formel (a) und falls $\eta^2 < 1$ ist, aus der Formel (b).

Aus der Formel (11*) folgt, daß

$$\operatorname{arc\,tan} x = \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan}(1:x);$$

somit hat man, wenn $|x| \geqq 1$ ist (die Werte $x = \pm i$ ausgenommen), nach (11)

$$\operatorname{arc\,tan} x = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad (c)$$

Demnach ist

$$\lim_{x=\infty} \operatorname{arc\,tan} x = +\frac{\pi}{2} \text{ oder } -\frac{\pi}{2},$$

je nachdem dem x die Halbebene der Punkte mit positiver Abszisse oder die andere zugewiesen ist. Da zufolge der Formel (a) der reelle Teil von $\operatorname{arc\,tan} \eta i$ im Falle daß $\eta^2 > 1$ ist, stets $-\frac{\pi}{2}$ ist, so mag man $\operatorname{arc\,tan} \infty = -\frac{\pi}{2}$ setzen.

Ist $x = \tan y$, $x' = \tan y'$, so hat man nach der Formel (41) S. 349 bei Benützung des oberen Vorzeichens

$$\tan(y + y') = \frac{x + x'}{1 - xx'}$$

d. i.
$$\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan} x' = \operatorname{Arc\,tan}\frac{x + x'}{1 - xx'},$$

welche Formel das Additionstheorem des Arcus tangens heißt.

Daß der Arcus tangens eine monogene Funktion ist, ergibt sich nach dem Satze a) S. 326 schon daraus, daß man nach (9)

$$\operatorname{Arc\,tan} x = \frac{i}{2}\{L(1 - xi) - L(1 + xi)\}$$

setzen darf. Aus ihr erkennt man z. B. unmittelbar folgendes. Der Zweig des $\operatorname{Arc\,tan} x$, welcher im Punkte a einer einfachen geschlossenen Linie, die von den obigen Halbstrahlen bloß den ersteren, von $+i$ ausgehenden, und zwar nur in einem Punkte schneidet, den Wert $\operatorname{arc\,tan} a$ hat und längs dieser im positiven Sinne beschriebenen Linie stetig ist, erlangt bei der Rückkehr nach a den Wert $\operatorname{arc\,tan} a + \pi$. Schneidet die Linie hingegen bloß den letzteren, von $-i$ ausgehenden Halbstrahl und zwar nur in einem Punkte, so erlangt der Zweig bei der Rückkehr nach a den Wert $\operatorname{arc\,tan} a - \pi$.

Die Funktion $\operatorname{Arc\,tan} x$ verliert bloß in den Punkten $x = i$ und $x = -i$ den Charakter einer rationalen. $\operatorname{Arc\,tan}(\pm i)$ ist ∞. — Zufolge der Formel (c) kann man einen Zweig des Arcus tangens durch die ganze Potenzreihe

$$\text{Arc tan } x = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \cdots \quad (|x| \geqq 1 \text{ außer } x = \pm i)$$

erklären, worin k irgend eine feste ganze Zahl vorstellt. Derselbe ist mithin im Punkte $x = \infty$ holomorph.

Anstatt Arc tan $(1 : x)$ schreibt man auch Arc cot x. Der Hauptwert des Arcus cotangens x wird durch die Formel

$$\text{arc cot } x = \text{arc tan } (1 : x)$$

erklärt.

Die Reihe (11) gibt für $x = +1$ die Leibnizsche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

welche aber zur Berechnung von π sich nicht eignet. Hierzu benutzte man früher die Formel

$$\pi = 6 \text{ arc tan } \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right\}.$$

Später wurde $\frac{\pi}{4}$ in zwei Bögen α, β zerlegt, deren Tangenten zufolge der Formel (41) S. 349 durch die Relation

$$1 = \frac{1 - \tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

verknüpft sein müssen. So findet man z. B. für $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ $\tan\beta = \frac{1}{3}$, also $\frac{\pi}{4} = \text{arc tan } \frac{1}{2} + \text{arc tan } \frac{1}{3}$.

Ist $\gamma = \alpha + \beta$, so hat man nach der genannten Formel

$$\tan\gamma = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}.$$

Hieraus ergibt sich z. B. wenn man $\tan\gamma = \frac{1}{3}$, $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ setzt, $\tan\beta = \frac{1}{8}$. Da somit arc tan $\frac{1}{3} =$ arc tan $\frac{1}{5}$ + arc tan $\frac{1}{8}$, also

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc tan } \frac{1}{2} + \text{arc tan } \frac{1}{5} + \text{arc tan } \frac{1}{8}$$

ist, so hat man $\frac{\pi}{4}$ in drei Bögen zerlegt, deren Tangenten endliche Dezimalbrüche sind. Hiernach berechnete Dahse 205 Stellen von π. Lehmann benutzte die Vegasche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \text{ arc tan } \frac{1}{3} + \text{arc tan } \frac{1}{7}$$

zur Berechnung von 261 Stellen von π.[1])

---

1) Vgl. Lehmann in Grunerts Archiv, 21. Bd. S. 121. — Gauß (Werke II. S. 501) gibt eine Zusammenstellung der von den Rechnern vor ihm und von ihm selbst angewandten Zerlegungen von $\frac{\pi}{4}$. Als erste erscheint die Machinsche

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ arc tan } \frac{1}{5} - \text{arc tan } \frac{1}{239}.$$

12. Der Arcus Sinus.

Aus der 2. Formel (36) S. 347 in der Gestalt

$$x = \sin y = \frac{1}{2i}\{e^{yi} - e^{-yi}\}$$

folgt durch Multiplikation mit $2ie^{yi}$ die Gleichung

$$e^{2yi} - 2xie^{yi} - 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$e^{yi} = xi \pm \sqrt{1 - x^2},$$

$$y = \operatorname{Arc\,sin} x = \frac{1}{i} L(xi \pm \sqrt{1 - x^2}). \tag{12}$$

Somit gehören zu jedem Werte von x, außer $x = \pm 1$, zwei Scharen von Werten des Arcus sinus, welche aus den beiden Hauptwerten derselben, dem ersten[1])

$$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{1}{i} l(xi + \sqrt{1 - x^2}) \tag{13}$$

und dem zweiten

$$\overline{\operatorname{arc\,sin}}\, x = \frac{1}{i} l(xi - \sqrt{1 - x^2}) \tag{13*}$$

durch Zufügung eines beliebigen positiven oder negativen Vielfachen von 2π hervorgehen. Die Werte der einen Schar haben den entgegengesetzten Kosinus wie die der anderen. Man hat nämlich

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} = \frac{1}{2}\left\{xi \pm \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{xi \pm \sqrt{1 - x^2}}\right\} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Selbstverständlich bedeutet in diesen Formeln $\sqrt{1 - x^2}$ den Hauptwert der Quadratwurzel aus $1 - x^2$. Die Hauptwerte des Arcus sinus haben einen reellen Teil, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, bezw. gleich π ist. Für $x = \pm 1$ sind der erste und zweite Hauptwert des Arcus sinus einander gleich und zwar $\pm\frac{\pi}{2}$.

Die Argumente der Logarithmen in den Formeln (13) sind von der Form $xi + z$, falls man unter z eine von den beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + z^2 = 1 \tag{α}$$

versteht. Zunächst ist zu bemerken, daß das Binom $xi + z$ für keinen endlichen Wert von x verschwindet; denn aus der Gleichung $xi + z = 0$ würde folgen $-x^2 = z^2$, d. i. nach (α) $0 = 1$. Weiter ist hervorzuheben, daß die Gleichungen (α) und

$$xi + z = v \qquad (v \neq 0) \tag{β}$$

in v rationale Lösungen nach x und z besitzen. Die Gleichung (β)

1) Die Erklärung der ersten Hauptwerte arc sin x, arc cos x nach Cauchy, Exercices d'Analyse IV (1847), p. 280.

liefert nämlich in Verbindung mit (α) $(v - ix)^2 = z^2 = 1 - x^2$, somit

$$x = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right). \qquad (\gamma)$$

Demnach ist

$$z = v - xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} + v\right). \qquad (\delta)$$

Aus der Formel (γ) entnehmen wir zunächst, daß nach (13)

$$lv = i \arcsin\left[\frac{i}{2}\left(\frac{1}{v} - v\right)\right]$$

ist, daß sich also der Logarithmus von v als ein Arcus sinus mit in v rationalem Argument darstellen läßt (vgl. S. 348).

Die beiden durch die Formeln (13) und (13*) erklärten Hauptzweige der Funktion Arc sin x sind zunächst dort unstetig, wo es $\sqrt{1 - x^2}$ ist, also in den Punkten, wo $1 - x^2$ gleich einer negativen Zahl $-\tau$ ist (S. 127). Diese Punkte

$$x = \pm\sqrt{1 + \tau} \qquad (\tau > 0)$$

erfüllen die beiden Halbstrahlen der reellen Achse, welche nach Ausscheidung der Strecke $(-1, 1)$ übrig bleiben [$(+1)X$ und $(-1)X'$ in Fig. 20]. Und zwar ist $\sqrt{1 - x^2}$ in den genannten Punkten auf den Seiten der Halbachsen OX, OX' unstetig, wo die zweite Koordinate von

$$1 - x^2 = 1 - (\xi + \eta i)^2 = -(\xi^2 - \eta^2 - 1) - 2\xi\eta i$$

negativ ist, also wenn $\xi > 1$, bei positivem η, wenn $\xi < -1$, bei negativem η, d. i. auf den positiven Seiten von OX und OX'. In Fig. 20 sind diese Seiten schraffiert. — arc sin x und $\overline{\arcsin}\, x$ sind ferner dort unstetig, wo das Argument des Logarithmus in (13) und (13*) negativ ist. Allein $xi + \sqrt{1 - x^2}$ kann nicht negativ sein. Setzt man nämlich in (β) $v = -\tau$ $(\tau > 0)$, so ist nach (γ) und (δ)

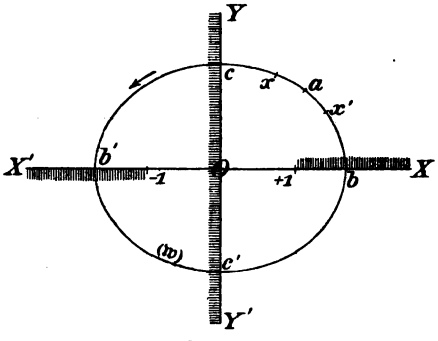


Fig. 20.

$$x = \frac{i}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right), \qquad z = -\frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right). \qquad (\varepsilon)$$

z ist also negativ, daher dem Nebenwert von $\sqrt{1 - x^2}$ gleich. arc sin x ist mithin nur unstetig in den Punkten der reellen Achse, welche nicht der Strecke $(-1, +1)$ angehören. Dagegen ist der zweite Hauptwert (13*) außer in den soeben genannten Punkten

noch unstetig in den Punkten der imaginären Achse YY'; denn die letzteren werden bei positivem τ durch die Formel (ε) dargestellt [$\tau = 1$ liefert $x = 0$, $\tau > 1$ die Punkte von OY, $\tau < 1$ die von OY']. Um zu erfahren, nach welcher Seite der Achse YY' $\overline{\arcsin}\, x$ in ihren Punkten unstetig ist, setzen wir in $xi - \sqrt{1-x^2}$ $x = \xi + \eta i$ und entwickeln den Ausdruck nach Potenzen von ξ. Für kleine Werte von $|\xi|$ ist sicher

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\xi^2+\eta^2-2\xi\eta i} = \sqrt{1+\eta^2}\cdot\left(1-\frac{2\xi\eta i+\xi^2}{1+\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Auf den letzten Ausdruck den binomischen Satz (Nr. 9) anwendend, finden wir als Koeffizienten von i in $xi - \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{\sqrt{1+\eta^2}+\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\,\xi + \frac{\eta}{2(1+\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\,\xi^3 + \cdots$$

Da $\sqrt{1+\eta^2}+\eta$ stets positiv ist, so hat derselbe bei hinlänglich kleinem $|\xi|$ das Zeichen von ξ (nach Formel (7) S. 180). Mithin ist $\overline{\arcsin}\, x$ in jedem Punkte $x = \eta i$ nach der (in der Figur schraffierten) Seite von YY', wo ξ negativ ist, unstetig. Dabei ist

$$\lim_{\xi=-0} \overline{\arcsin}(\xi+\eta i) = \overline{\arcsin}(\eta i) - 2\pi. \qquad (\varepsilon^*)$$

Man hat

$$\arcsin x + \overline{\arcsin}\, x = \pi \text{ oder } -\pi, \qquad (\xi)$$

je nachdem die erste Koordinate ξ von x nicht negativ oder negativ ist. Dies folgt bei von 0 verschiedenem ξ nach dem Satze S. 127 daraus, daß diese Summe zufolge der Formeln (13) und (13*) für $x = 1$ gleich π, für $x = -1$ gleich $-\pi$ ist. Für $x = \eta i$ hat man

$$\arcsin(\eta i) = \frac{1}{i}\,l(\sqrt{1+\eta^2}-\eta),\quad \overline{\arcsin}(\eta i) = \frac{1}{i}\,\{l(\sqrt{1+\eta^2}+\eta)+\pi i\},$$

also $\arcsin(\eta i) + \overline{\arcsin}(\eta i) = \pi$.

Additionstheorem des Arcus sinus. Ist y ein Bogen, dessen Sinus und Kosinus bezw. gleich x und z sind, und y' einer, wofür $\sin y' = x'$, $\cos y' = z'$ ist, so hat man nach (38) S. 348

$$\sin(y+y') = xz' + zx'.$$

Mithin kann man setzen

$$y + y' = \operatorname{Arc}\sin x + \operatorname{Arc}\sin x' = \operatorname{Arc}\sin(xz' + zx').$$

Die Summe je zweier Arcus sinus ist also gleich einem Arcus sinus, dessen Argument rational aus den Sinus und Kosinus der beiden Bogen zusammengesetzt ist.

Über die Funktion $\operatorname{Arc}\cos x$ vgl. S. 394, Übung 21.

13. Der Arcus sinus x eine monogene Funktion von x.

Wir zeigen zuerst, daß sich der erste Hauptwert arc sin$x$ für alle x, deren Betrag 1 nicht übersteigt, in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln läßt. Nach dem Satze 4) in V. 27 über die Umkehrung der Reihen gibt es eine und nur eine innerhalb eines gewissen Kreises (O, R) konvergente Potenzreihe

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = g(x), \tag{a}$$

welche für y in die Gleichung

$$x = \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \tag{b}$$

gesetzt, sie identisch erfüllt. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung eine beständig konvergente Potenzreihe von y steht, so darf man nach V. 26 behaupten, daß, wenn x einen Wert innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\Sigma c_n x^n$ bedeutet, die Zahl $y = \Sigma c_n x^n$ eine Wurzel der Gleichung (b) ist. D. h. für jeden der genannten Werte von x stellt die Potenzreihe (a) einen Wert des Arcus sinus dar. — Durch Einsetzung der Reihe (a) in (b) und Vergleichung der Koeffizienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung findet man $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ usw. Ein independenter Ausdruck für c_n ergibt sich leichter auf folgende Art. Aus der Formel (21) S. 235 ergibt sich, wenn man darin $f(y) = \sin y$ setzt und bedenkt, daß nach S. 348 $D_y \sin y = \cos y$ ist, die Gleichung

$$g'(x) = 1 : \cos g(x). \tag{c}$$

Nun ist

$$\cos g(x) = \pm\sqrt{1 - \sin g(x)^2} = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

somit nach dem binomischen Satze S. 357 für $s = \frac{1}{2}$

$$\cos g(x) = \pm\,(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \cdots), \tag{d}$$

jedoch nur dann, wenn $|x| \leqq 1$ ist. Durch direkte Berechnung von $\cos g(x)$ überzeugt man sich, daß, wenn $|x| < R$ ist, hier das obere Zeichen stehen muß. Es ist nämlich

$$\cos g(x) = 1 - \frac{g(x)^2}{2!} + \frac{g(x)^4}{4!} - \cdots$$

Setzt man hier nach (a) $g(x) = x + \cdots$, so kann man zufolge des Satzes V. 7 wegen der beständigen Konvergenz der Kosinusreihe die rechte Seite für alle x, deren Betrag kleiner als R ist, in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln. Und zwar findet man

$$\cos g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cdots;$$

somit ist $\cos g(x)$ bei der genannten Beschränkung von $|x|$ gleich der mit dem oberen Zeichen versehenen Reihe in (d). Da dieselbe,

wie bemerkt, nur wenn $|x| \leq 1$ ist, konvergiert, so muß man schließen, daß $R \leq 1$ ist.

Wenn $|x| < R$ ist, ist also

$$\cos g(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Mithin erhält man unter der nämlichen Bedingung aus der Formel (c) die Gleichung

$$g'(x) = 1 : \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{e}$$

Daher muß für die Werte von x, deren Betrag kleiner als R ist,

$$g'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

$$= (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_1^\infty{}_k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} x^{2k}$$

sein (letzteres nach dem binomischen Satze für $s = \frac{1}{2}$), woraus sich unmittelbar die Werte

$$c_{2k} = 0, \quad c_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \cdot \frac{1}{2k+1} \quad (k = 1, 2 \cdots)$$

ergeben. Da

$$\frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{-1} = 1 - \frac{3}{2k} + \cdots$$

ist, so konvergiert die Potenzreihe $\Sigma c_{2k+1} x^{2k+1}$ nach V. 3 und VI. 13 für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, und zwar absolut.

Es ist leicht einzusehen, daß der durch die Reihe

$$x + \sum_1^\infty{}_k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{f}$$

dargestellte Wert des Arcus sinus x der erste Hauptwert arc sin x ist. Der durch die Reihe (f) bestimmte Wert von Arc sin x hat $\sqrt{1 - x^2}$ zum Kosinus, gehört also der ersten Reihe der Werte von Arc sin x an, die sich untereinander bloß durch ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Da nun sowohl die Summe der Reihe (f), als auch arc sin x für alle Werte von x, deren Betrag die Einheit nicht übersteigt, stetig sind und die erstere für $x = 0$ den Wert $0 =$ arc sin 0 liefert, so müssen nach dem Satze S. 127 diese beiden Funktionen für alle die genannten Werte von x übereinstimmen.

Der erste Hauptwert des Arcus sinus x, arc sin x, wird für alle Werte x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, durch die Potenzreihe

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots \tag{14}$$

dargestellt.[1]) Dabei[2]) liegt der reelle Teil der Summe dieser Reihe zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, abgerechnet $x = \pm 1$, wofür sie $\pm\frac{\pi}{2}$ ist.

Die Formel (e) nimmt nun die Gestalt an

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1). \tag{g}$$

Der Arc sin x ist eine monogene Funktion von x, von der die Reihe (14) ein Element bildet. Aus dem Ausdrucke (12) für den Arcus sinus kann man die Richtigkeit dieser Behauptung nicht mit Sicherheit erschließen (S. 326), weil der Logarithmus von v eine vieldeutige Funktion von v ist.[3]) Übrigens ist es leicht, dieselbe in der nämlichen Weise, wie die ähnliche Behauptung über den Logarithmus (Nr. 7*), zu erhärten. Hierzu genügen die nachstehenden zwei Bemerkungen.

a) Denken wir uns eine geschlossene einfache Linie $\mathfrak{l}$, welche den Punkt $+1$ (bezw. -1) umkreist und die imaginäre Achse YY' nicht schneidet, und beschreiben wir sie von einem ihrer Punkte a aus in einem Sinne. Es gibt einen und zufolge des Satzes S. 127, angewendet auf die erste und auf die zweite Reihe der Werte des Arcus sinus, nur einen Zweig dieser Funktion, welcher in a den Wert $\arcsin a$ hat und in allen Punkten von $\mathfrak{l}$ außer a stetig ist. Bezeichnen wir ihn mit $f(x)$, so haben wir, wenn der Punkt x sich längs der Linie $\mathfrak{l}$ dem Punkte a in dem Sinne nähert, in welchem $\mathfrak{l}$ beschrieben ist,

$$\lim_{x=a(\mathfrak{l})} f(x) = \overline{\arcsin a}.$$

Kurz ausgedrückt: Die Funktion $f(x)$, wofür $f(a) = \arcsin a$ ist, nimmt bei der Rückkehr des Punktes x nach a den zweiten Hauptwert des Arcus sinus, $\overline{\arcsin a}$ an. — Dieser Satz ergibt sich zufolge der Formel (13) daraus, daß der Hauptwert $\sqrt{1-x^2}$ nach Durchlaufung der Linie $\mathfrak{l}$ vom Punkte a aus von $\sqrt{1-a^2}$ in den Nebenwert $-\sqrt{1-a^2}$ übergeht. Und diese Bemerkung ist eine unmittelbare Folge der für alle Punkte der Ebene gültigen Formel[4])

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}. \tag{h}$$

---

1) Ein anderes Verfahren, zur Reihe (14) zu gelangen, findet man am Schlusse von Nr. 15.

2) Dies folgt aus dem Satze in der 19. Übung zum VIII. Abschnitt.

3) Über den Beweis der Monogeneïtät von $\sqrt[n]{1-x^2}$ vgl. S. 399, Übg. 38).

4) Schreibt man die in der Formel (h) befindlichen Hauptwerte als Potenzen von e an, so erkennt man sofort, daß dieselbe mit der Formel

$$l(1-x^2) = l(1-x) + l(1+x) \tag{i}$$

Wenn x die Linie $\mathfrak{l}$ von a aus beschreibt, so geht nach S. 127 $\sqrt{1-a}$ in $-\sqrt{1-a}$, $\sqrt{1+a}$ dagegen in sich selbst über, mithin $\sqrt{1-a^2}$ in $-\sqrt{1-a^2}$.[1])

b) Legen wir durch einen Punkt a (Fig. 20) eine einfache geschlossene Linie $\mathfrak{w}$, welche die beiden Punkte $x=-1$ und $+1$ umschließt und jede Koordinatenachse in zwei Punkten, XX' in bb', YY' in cc' schneidet, und beschreiben wir sie in positivem Sinne, so gibt es nach dem Satze S. 127 einen und nur einen Zweig $f(x)$ der Arcus sinus-Funktion, welcher in a den Wert $\arcsin a$ hat, in allen anderen Punkten von $\mathfrak{w}$ eindeutig und stetig ist und wofür

$$\lim_{x=a(-\mathfrak{w})} f(x) = \arcsin a$$

ist, unter x einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{w}$ vor a verstanden. Alsdann ist, wenn x' einen Punkt von $\mathfrak{w}$ hinter a bedeutet,

$$\lim_{x'=a(+\mathfrak{w})} f(x') = \arcsin a - 2\pi.$$

Der durch stetige Fortsetzung des Arcus sinus längs der im positiven Sinne beschriebenen Linie $\mathfrak{w}$ entstandene Zweig derselben, welcher von a mit dem Werte $\arcsin a$ ausgeht, hat bei der Rückkehr nach a den Wert $\arcsin a - 2\pi$ erlangt. — Wenn a z. B. im ersten Quadranten XOY liegt, so wird $f(x)$ zufolge der Angaben in Nr. 12 folgendermaßen bestimmt. Im Bogen acb' setzen wir mit Einschluß des Punktes b' $f(x) = \arcsin x$, im Bogen $b'c'$ mit Ausnahme von c' $f(x) = \overline{\arcsin x}$. Für das Stück $c'b$ (b einbegriffen) müssen wir mit Rücksicht auf die Formel (ε^*) S. 372 $f(x) = \overline{\arcsin x} - 2\pi$ nehmen und daher im Stücke ba mit Ausschluß von $x=b$ $f(x) = \arcsin x - 2\pi$.

Die singulären Punkte der Funktion $\operatorname{Arc}\sin x$ sind $+1$, -1, ∞. Der erste gibt sich dadurch zu erkennen, daß, wenn man in der

gleichbedeutend ist. Daß diese für reelle Werte von x außer $x=\pm 1$ gilt, sieht man unmittelbar; daß sie für alle x, deren Betrag 1 nicht übersteigt, außer $x=\pm 1$ richtig ist, folgert man daraus, daß nach dem Satze S. 357 die zweite Koordinate von $l(1-x)$ und $l(1+x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, also die ihrer Summe zwischen $-\pi$ und π liegt. Die Ausdehnung der Formel (i) auf alle übrigen Werte von x geht mit Hilfe des Satzes S. 127 vor sich. Dabei ist zu bemerken, daß die Unstetigkeitslinie von $l(1-x)$ das Stück der Halbachse OX von $+1$ ins Unendliche, die von $l(1+x)$ das der Halbachse OX' von -1 ins Unendliche ist und diese Hauptwerte auf den in Fig. 20 schraffierten Seiten dieser Stücke unstetig sind, sowie daß die Unstetigkeitslinien von $l(1-x^2)$ nach S. 371 ebenfalls die beiden soeben erwähnten Stücke sind und daß auch dieser Hauptwert auf den bereits bezeichneten Seiten derselben unstetig ist.

1) Beweis auch so: Schneidet die Linie $\mathfrak{l}$ die Strecke $(+1)$ X in b und ist sie von a aus z. B. im positiven Sinne beschrieben, so hat man nach Nr. 12 auf dem Stücke ab (b eingeschlossen) $f(x) = \arcsin x$, auf dem Stücke ba $f(x) = \overline{\arcsin x}$ zu setzen.

Formel (12) S. 370 $1 - x = t^2$ d. i. $x = 1 - t^2$ setzt, ihre rechte Seite bei gehörig kleinem $|t|$ in eine ganze Potenzreihe von t übergeht, worin auch Glieder mit ungeraden Exponenten von t vorkommen. Auf ähnliche Weise, nämlich durch Untersetzung $x = t^2 - 1$, erkennt man den singulären Charakter des Punktes $x = -1$. Der Punkt $x = \infty$ ist singulär zufolge der Formel

$$L(xi \pm \sqrt{1 - x^2}) = Lx + L\left(i \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$$
$$= Lx + \frac{\pi}{2} i + l\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right),$$

deren letztes Glied sich im Falle des oberen Zeichens bei gehörig großem $|x|$ in eine ganze Potenzreihe von $1 : x$ verwandeln läßt, im Falle des unteren in eine solche weniger $2Lx$.

14. Ganze Potenzreihen für einige zusammengesetzte Funktionen. a) Wenn

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$$

eine endliche oder eine für alle Werte von x, deren Betrag kleiner als R ist, konvergente unendliche ganze Potenzreihe bedeutet, so läßt sich die Funktion $e^{f(x)}$ nach S. 186 für eben dieselben Werte von x in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln. Setzen wir

$$\sum_1^\infty a_n x^n = f_1(x),$$

so haben wir

$$e^{f(x)} = e^{a_0}\, e^{f_1(x)}$$

und dazu

$$e^{f_1(x)} = 1 + \sum_1^\infty \frac{f_1(x)^n}{n!} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = g(x).$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots$ sich rekurrierend bestimmen lassen. Es sei x ein beliebiger, bezw. ein Wert, dessen Betrag kleiner als R ist. Dann hat man nach V. 8

$$\left.\begin{aligned} f_1(x+u) &= f_1(x) + f_1'(x)\,u + \cdots \\ g(x+u) &= g(x) + g'(x)\,u + \cdots \end{aligned}\right\} \quad |u| < R - |x|.$$

Nun ist

$$g(x+u) = e^{f_1(x+u)}.$$

Verwandelt man $e^{f_1(x+u)}$ in eine ganze Potenzreihe von u, so erhält man

$$g(x+u) = e^{f_1(x)}\{1 + f_1'(x)\,u + \cdots\} = g(x) + g(x)\,f_1'(x)\,u + \cdots$$

Somit besteht für alle Werte von u, deren Betrag kleiner als $R - |x|$ ist, die Gleichung

$$g(x) + g'(x)\,u + \cdots = g(x) + g(x) f_1'(x)\,u + \cdots$$

Wir dürfen daher nach V. 5 die Koeffizienten der nämlichen Potenzen von u auf beiden Seiten derselben einander gleich setzen, so daß wir u. a. zur Formel[1])

$$g(x)f_1'(x) = g'(x), \qquad \text{d. i.} \qquad (\alpha)$$

$$(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)(a_1 + 2a_2x + \cdots) = b_1 + 2b_2x + \cdots$$

gelangen. Da diese Formel zum mindesten für alle x, deren Betrag kleiner als R ist, gilt, so dürfen wir nach dem genannten Satze die Koeffizienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten derselben einander gleich setzen, wodurch wir die angekündigten Rekursionsformeln

$$a_1 = b_1$$
$$2a_2 + b_1a_1 = 2b_2$$
$$3a_3 + 2b_1a_2 + b_2a_1 = 3b_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$na_n + (n-1)b_1a_{n-1} + \cdots + b_{n-1}a_1 = nb_n$$

erhalten.

Beispiele s. Übung 27) S. 395.

b) Ist a_0 eine von Null verschiedene, nur nicht negative reelle Zahl, so kann man aus der Formel

$$f(x) = a_0\left\{1 + \frac{f_1(x)}{a_0}\right\}$$

schließen, daß, wenn x dem Betrage nach gehörig klein ist,

$$lf(x) = la_0 + l\left\{1 + \frac{f_1(x)}{a_0}\right\} \qquad (\beta)$$

sein muß. In der Tat, da die zweite Koordinate von la_0 zwischen $-\pi$ und π liegt und die von $l(1 + f_1(x) : a_0)$ bei $\lim x = 0$ den Grenzwert 0 hat, so liegt bei genug kleinem $|x|$ auch die der rechten Seite von (β) zwischen $-\pi$ und π; diese Seite muß also der Hauptwert von $Lf(x)$ sein.

$l(1 + f_1(x) : a_0)$ läßt sich mit Hilfe der logarithmischen Reihe nach dem Satze in V. 7 für die Werte von x, deren Betrag unter einer gewissen Zahl K liegt, in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln. Setzt man $|x| = X$, $|a_n| = A_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und $\sum_1^\infty A_nX^n = \Phi_1(X)$, so ist K so zu wählen, daß $\Phi_1(K) < A_0$ ist. Setzt man demnach

$$l(1 + f_1(x) : a_0) = d_1x + d_2x^2 + \cdots = h(x), \qquad (\gamma)$$

und denkt $|x| < K$, so ist

$$e^{h(x)} = 1 + f_1(x) : a_0. \qquad (\delta)$$

1) Dieselbe bildet auch einen besonderen Fall der Formel (d) S. 240.

Daraus schließt man wegen der beständigen Konvergenz der Exponentialreihe, daß die Reihe $h(x)$ die Gleichung (δ) erfüllt für alle x, wofür sie überhaupt konvergiert, somit gleich einem Logarithmus von $1 + f_1(x) : a_0$ ist. Nur darf man nicht glauben, daß dies stets der Hauptwert desselben sein muß. Die Gleichung (γ) wird vielmehr nur so weit gelten, als der Hauptwert $l(1 + f_1(x) : a_0)$ stetig ist.

Nach dem 1. Satze in VII. 11 geht der wahre Konvergenzkreis der ganzen Potenzreihe

$$d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots \tag{15}$$

durch den oder die dem Nullpunkte nächsten unter den Punkten innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\sum_0^\infty a_n x^n$, wofür die Summe $f(x)$ der letzteren verschwindet. Falls es aber solche Punkte nicht gibt, so reicht das Konvergenzgebiet der Reihe (15) mindestens so weit, als das der Reihe $\Sigma a_n x^n$. — In den Punkten $x = x_0$, wofür $f(x_0) = 0$ ist, verliert nämlich die Summe der Reihe (15) d. i. der mit ihr übereinstimmende Zweig $Lf(x)$ den Charakter einer ganzen Funktion, was schon daraus hervorgeht, daß

$$\lim_{x = x_0} |Lf(x)| = +\infty$$

ist.

Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Reihe (15). Der Kürze wegen sei

$$a_n : a_0 = c_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt. Auf ähnliche Weise wie die Formel (α) sich ergibt, findet man aus (δ) die Formel[1])

$$\left(1 + \frac{f_1(x)}{a_0}\right) h'(x) = \frac{f_1'(x)}{a_0} \qquad \text{d. i.}$$

$$(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)(d_1 + 2 d_2 x + \cdots) = c_1 + 2 c_2 x + \cdots$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten der nämlichen Potenzen von x auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man die Formeln

$$d_1 = c_1, \quad 2 d_2 + c_1 d_1 = 2 c_2, \cdots$$

$$n d_n + (n-1) c_1 d_{n-1} + \cdots + c_{n-1} d_1 = n c_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Beispiel. Die Funktion $l(1 + 2x\cos\theta + x^2)$ liefert nach V. 7 mindestens für alle x, deren Betrag kleiner als $\sqrt{2} - 1$ ist, die Entwicklung in die ganze Potenzreihe

---

1) Hierbei ist nur zu bemerken, daß $f(x)$ für kein x, dessen Betrag kleiner als K, Null ist. In der Tat ist für jedes solche x

$$\left|1 + \frac{f_1(x)}{a_0}\right| \geqq 1 - \frac{|f_1(x)|}{A_0} \geqq 1 - \frac{\Phi_1(X)}{A_0} > 0.$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n (2\cos\theta + x)^n = 2\cos\theta \cdot x - (2\cos\theta^2 - 1)x^2 + \cdots \quad (15^*)$$

Der Konvergenzradius der Reihe (15*) ist 1; denn die Wurzeln der Gleichung

$$1 + 2x\cos\theta + x^2 = 0$$

sind $x = -\cos\theta \pm i\sin\theta$, haben also den Betrag 1. Die Reihe (15*) konvergiert auch für alle Werte vom Betrage 1 außer $x = -e^{\theta i}$ und $x = -e^{-\theta i}$ (vgl. Übung 12) S. 392). Die Summe der Reihe (15*) ist für jedes x, dessen Betrag 1 nicht übersteigt, außer $x = \pm e^{-\theta i}$ der Hauptwert $l(1 + 2x\cos\theta + x^2)$, weil derselbe bei jedem derselben stetig ist. Die Gleichung

$$1 + 2x\cos\theta + x^2 = -\tau \quad (\tau > 0)$$

liefert nämlich die Punkte

$$x = -\cos\theta \pm i\sqrt{\tau + \sin\theta^2},$$

deren Abstand vom Nullpunkte $\sqrt{\tau + 1}$, also größer als 1 ist.

Die Koeffizienten der Potenzen von x in der Reihe (15*), durch 2 dividiert, sind gleich denen der nämlichen Potenzen von ϱ in der ersten der Formeln (8) S. 365; denn die halbe Summe der ersteren Reihe stimmt, wenn x eine reelle Zahl ϱ ist, mit der letzteren überein.

Weitere Beispiele s. S. 396, Übung 28).

c) Der allgemeine polynomische Satz. Unter der nämlichen Voraussetzung über a_0 wie in b) hat man

$$\{f(x)\}^s = a_0^s (1 + f_1(x) : a_0)^s,$$

worin s jede komplexe Zahl sein darf. Der zweite Faktor rechts läßt sich mit Hilfe des binomischen Satzes nach V. 7 sicher für alle Werte von x, deren Betrag kleiner ist als die in b) erklärte positive Zahl K, in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln. Setzen wir wie oben $a_n : a_0 = c_n$ und $f_1(x) : a_0 = g_1(x)$, so ist mithin, falls $|x| < K$,

$$\{1 + g_1(x)\}^s = 1 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots = k(x). \quad (\varepsilon)$$

Der Konvergenzkreis der ganzen Potenzreihe

$$1 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots$$

stimmt mit dem der Reihe (15) überein und der Gültigkeitsbereich der Formel (ε) mit dem der Formel (γ).

Um die Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots$ zu bestimmen, verfährt man ähnlich wie in a).[1]) Für die Werte von u von gehörig kleinem Betrage hat man zufolge (ε)

$$\{1 + g_1(x) + g_1'(x)\,u + \cdots\}^s = k(x) + k'(x)\,u + \cdots \quad (\zeta)$$

1) Euler, Inst. Calc. diff. II. § 202.

Nun ist, da, wie in der Note S. 379 bemerkt, $1 + g_1(x)$ für die x, deren Betrag $< K$ ist, nicht verschwindet, die linke Seite von (ζ) gleich

$$k(x)\left\{1 + \frac{g_1'(x)}{1+g_1(x)}u + \cdots\right\}^s. \qquad (\eta)$$

Entwickelt man den zweiten Faktor mittels des binomischen Satzes in eine ganze Potenzreihe von u und setzt den so für (η) erhaltenen Ausdruck in die Formel (ζ) ein, so darf man die Koeffizienten von u zu beiden Seiten der neuen Gleichung einander gleichsetzen. Dadurch gewinnt man die Formel

$$k(x)\frac{sg_1'(x)}{1+g_1(x)} = k'(x) \text{ oder } sk(x)g_1'(x) = k'(x)\,(1+g_1(x))$$

d. i. $s(1 + e_1x + e_2x^2 + \cdots)(c_1 + 2c_2x + \cdots)$

$$= (e_1 + 2e_2x + \cdots)(1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots).$$

Aus ihr folgt durch Gleichsetzung der Koeffizienten x^{n-1} auf ihren beiden Seiten die Rekursionsformel für e_n $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$s(nc_n + (n-1)e_1c_{n-1} + \cdots + 2e_{n-2}c_2 + e_{n-1}c_1)$$

$$= e_1c_{n-1} + 2e_2c_{n-2} + \cdots + (n-1)e_{n-1}c_1 + ne_n$$

oder

$$nsc_n + ((n-1)s - 1)e_1c_{n-1} + ((n-2)s - 2)e_2c_{n-2} + \cdots$$

$$+ (s - n + 1)e_{n-1}c_1 = ne_n.$$

Hieraus erhält man $e_1 = sc_1$, $e_2 = sc_2 + \binom{s}{2}c_1^2$ u. s. f., vgl. Übung 29) S. 396.

Z. B. Die Funktion

$$(1 + 2\cos\theta + x^2)^s$$

liefert eine Potenzreihe für alle Werte von x, deren Betrag unter 1 liegt.

15. Die ganzen Potenzreihen für cos (s arc sin x) und sin (s arc sin x).[1])

Wenn man den Koeffizienten von x^n $(n = 1, 2, \ldots)$ in der ersten Formel (8) S. 365 d. i.

$$l(1 + 2x\cos\theta + x^2) = 2\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cos n\theta \quad (|x| < 1)$$

dem der nämlichen Potenz von x in der Reihe (15*) S. 380 gleichsetzt, so gelangt man zur Formel

---

1) Die hier gegebene Ableitung der Formeln (18) bis (20) findet sich in J. Thomae, Elem. Theor. d. analyt. Funktionen, § 133. Die Konvergenzbedingungen für dieselben hat bei reellem s Cauchy (Oeuvres 2. III. p. 449) angegeben.

$$\frac{2\cos n\theta}{n} = \frac{(2\cos\theta)^n}{n} - \binom{n-1}{1}\frac{(2\cos\theta)^{n-2}}{n-1} + \cdots$$
$$+ (-1)^r \binom{n-r}{r}\frac{(2\cos\theta)^{n-2r}}{n-r} + \cdots,$$

worin r von Null bis zu der größten, $\frac{1}{2}n$ nicht übersteigenden ganzen Zahl geht. Ist n gerade ($n = 2k$), so nimmt r zuletzt den Wert k an. Multipliziert man die letzte Gleichung mit $(-1)^k k$ und schreibt anstatt r $k - r$, so geht das allgemeine, in der zweiten Zeile befindliche Glied in

$$(-1)^r \binom{k+r}{2r}\frac{k}{k+r}(2\cos\theta)^{2r} \quad (r = 1, 2, \cdots k)$$

über. Dabei ist

$$\binom{k+r}{2r}\frac{k}{k+r} = \frac{k^2(k^2-1^2)(k^2-2^2)\cdots[k^2-(r-1)^2]}{(2r)!}.$$

Somit läßt sich die letzte Formel im Falle, daß $n = 2k$ ist, auf die Form bringen:

$$(-1)^k \cos n\theta$$
$$= 1 + \sum_1^k (-1)^r \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-(2r-2)^2]}{(2r)!}\cos\theta^{2r}.$$

Setzt man hier statt θ $\frac{\pi}{2} - \theta$, so ergibt sich die Entwicklung von $\cos n\theta$ nach Potenzen von $\sin\theta$:

$$\cos n\theta =$$
$$1 + \sum_1^k (-1)^r \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\cdots[n^2-2r-2)^2]}{(2r)!}\sin\theta^{2r}. \quad (16)$$

Im Falle, daß n ungerade ist ($n = 2k+1$), erhält man auf demselben Wege die Formel

$$\sin n\theta = n\sin\theta +$$
$$\sum_1^k (-1)^r \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\cdots[n^2-(2r-1)^2]}{(2r+1)!}\sin\theta^{2r+1}. \quad (17)$$

$\cos(s \arcsin x)$ läßt sich mittels der Kosinus- und Arcus sinus-Reihe nach dem Satze in V. 7 bei beliebigem s für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt, in eine Potenzreihe von x verwandeln:

$$\cos(s \arcsin x) = 1 + \sum_1^\infty \varphi_{2r}(s)x^{2r},$$

wo $\varphi_{2r}(s)$ eine ganze Funktion $2r^{\text{ten}}$ Grades von s ist.

Falls s eine gerade Zahl ist, muß die Reihe mit derjenigen endlichen Reihe übereinstimmen, die sich aus (16) durch die Substitution $\sin\theta = x$ ergibt. Man hat also

$$\varphi_{2r}(s) = (-1)^r \frac{s^2(s^2-2^2)\cdots[s^2-(2r-2)^2]}{(2r)!},$$

wenn s eine gerade Zahl bezeichnet, und daher nach dem 3. Satze in IV. 2 allgemein. Es besteht mithin, wenn nur $|x| \leqq 1$ ist, bei beliebigem s die Entwicklung

$$\cos(s \arcsin x) =$$
$$1 + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s^2(s^2-2^2)(s^2-4^2)\cdots[s^2-(2r-2)^2]}{(2r)!} x^{2r}. \quad (18)$$

Unter denselben Bedingungen gilt die mittels (17) abzuleitende Formel

$$\sin(s \arcsin x) =$$
$$sx + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s(s^2-1^2)(s^2-3^2)\cdots[s^2-(2r-1)^2]}{(2r+1)!} x^{2r+1}. \quad (19)$$

Setzt man in (18) und (19)

$$x = 1, \qquad \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

so erhält man neue, für jeden Wert von s konvengente Reihen für $\cos \frac{1}{2} s\pi$ und $\sin \frac{1}{2} s\pi$.

Durch Differentiierung der Formeln (18) und (19) nach x [d. i. durch singemäße Anwendung der Formel (d) S. 240, wobei die Formel (g) S. 375 zu benutzen ist] gelangt man zu den Reihenentwicklungen

$$\frac{\sin(s \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$sx + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{s(s^2-2^2)(s^2-4^2)\cdots[s^2-(2r)^2]}{(2r+1)!} x^{2r+1},$$
$$\frac{\cos(s \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} = \quad (20)$$
$$1 + \sum_1^\infty (-1)^r \frac{(s^2-1^2)(s^2-3^2)\cdots[s^2-(2r-1)^2]}{(2r)!} x^{2r}.$$

Sie gelten für alle Werte von $x: |x| \leqq 1$, ausgenommen $x = \pm 1$. Ihr Verhalten auf dem Konvergenzkreise $(O, 1)$ wird leicht mit Hilfe des Satzes S. 284 beurteilt.

Läßt man in den Formeln (20) x eine reelle Zahl, deren Betrag nicht größer als 1 ist, sein und setzt $\arcsin x = \theta$, so ist θ eine dem Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ angehörige reelle Zahl. Unter dieser Voraussetzung darf man daselbst

$$x = \sin\theta, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos\theta$$

setzen. Läßt man ferner s eine ganze Zahl n und zwar in der ersten

Formel (20) die gerade Zahl $2k$, in der zweiten die ungerade Zahl $2k+1$ sein, so gelangt man zu den Formeln

$$\frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = n\sin\theta + \sum_1^{k-1}(-1)^r \frac{n[n^2-2^2](n^2-4^2)\cdots[n^2-(2r)^2]}{(2r+1)!}\sin\theta^{2r+1},$$

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta} = 1 + \sum_1^{k}(-1)^r \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\cdots[n^2-(2r-1)^2]}{(2r)!}\sin\theta^{2r}.$$

Hier darf jedoch θ jede reelle Zahl sein, wofür $\cos\theta$ nicht Null ist. Denn nach einer Bemerkung Arithmetik S. 353 wissen wir, daß $\sin n\theta : \cos\theta$ bei geradem n und $\cos n\theta : \cos\theta$ bei ungeradem n sich für jedes solche θ als ganze Funktionen von $\sin\theta$ darstellen lassen. Diese Funktionen müssen also nach dem 3. Satze S. 140 bezw. mit den auf den rechten Seiten der letzten Formeln befindlichen identisch sein.

Die Reihen auf den rechten Seiten der Formeln (18) bis (20) dürfen nach Potenzen von s geordnet werden, wenn $|x| < 1$, die beiden ersteren sogar, wenn $|x| = 1$ ist. Sie erfüllen nämlich dann die in V. 7 erwähnte Cauchysche Bedingung. Denkt man sich das allgemeine Glied z. B. in (18) entwickelt und die Summe der absoluten Beträge der Glieder gebildet, so erhält man den Ausdruck

$$A_r X^{2r} = \frac{S^2(S^2+2^2)\cdots(S^2+[2r-2]^2)}{(2r)!}X^{2r},$$

worin $X = |x|$ und $S = |s|$ ist. Da

$$\frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{S^2+(2r-2)^2}{(2r-1)\,2r} = 1 - \frac{3}{2r} + \cdots$$

ist, so konvergiert die Reihe

$$1 + A_1 X^3 + A_2 X^4 + \cdots,$$

wenn $X \leqq 1$ ist (S. 285).

Entwickelt man nun beide Seiten der in Rede stehenden Gleichungen nach Potenzen von s und setzt die Koeffizienten der nämlichen Potenzen von s einander gleich, so gewinnt man zahlreiche neue Reihenentwicklungen. Die Formel (19) würde uns die Koeffizienten der Arcus sinus-Reihe liefern, wenn wir sie nicht schon kennen würden. Aus (18) folgt zunächst die Formel

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \sum_2^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n} \quad (|x| \leqq 1).$$

16. Asymptotischer Ausdruck für die Summe der nämlichen Potenzen der natürlichen Zahlen im Falle, daß die ins Unendliche fortgesetzte Reihe derselben divergiert.

Um noch eine Anwendung einiger Sätze der Reihentheorie (Arithmetik Abschn. IX und XIII), des VI. und VIII. Abschnittes vorzuführen, möge eine Klasse von harmonischen Reihen (S. 390),

nämlich die unendlichen Reihen

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots, \tag{1}$$

worin s irgend eine komplexe Zahl $\mu+\nu i$ bezeichnet und die Potenzen Hauptwerte sind, betrachtet werden.

1. Satz. Die unendliche Reihe (1) konvergiert und zwar absolut, wenn der reelle Teil des Exponenten s größer als 1 ist; in jedem anderen Falle ist sie divergent. Das ergibt sich unmittelbar aus dem Satze S. 278, wenn man bemerkt, daß

$$\frac{1}{n^s}:\frac{1}{(n-1)^s}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^s=1-\frac{s}{n}+\binom{s}{2}\frac{1}{n^2}-\cdots$$

ist. Wir bezeichnen im Falle der Konvergenz die Summe von (1) mit $S(s)$ oder S_s[1]) und setzen

$$\frac{1}{l^s}+\frac{1}{(l+1)^s}+\frac{1}{(l+r)^s}+\cdots=S_l(s)\qquad(l\geqq 2).$$

Im Falle, daß die harmonischen Reihen (1) divergieren, bestehen die folgenden Sätze.

2. Satz. „Wenn in (1) $s=+1$ ist, so hat man die Formel

$$\lim_{n=+\infty}\left\{\sum_1^{n-1}\frac{1}{r}-ln\right\}=c, \tag{2}$$

wo c die Eulersche Konstante, d. i. die Zahl 0,5772156649 ···[2]) bedeutet."

Beweis. Setzt man

$$0=X_1,\ \sum_1^{n-1}\frac{1}{r}-ln=X_n\ (n\geqq 2),\ a_k=X_{k+1}-X_k=\frac{1}{k}-l\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

so ist

$$X_n=X_l+a_l+a_{l+1}+\cdots+a_{n-1}.$$

Da nach der Formel (a) S. 359, wenn $k\geqq 1$ ist,

$$l\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\cdots+\frac{(-1)^{g-1}}{gk^g}+\cdots$$

ist, so ergibt sich

$$a_k=\sum_2^\infty{}_g\frac{(-1)^g}{gk^g}.$$

---

1) Riemann (Werke, S. 136) schreibt $\zeta(s)$ anstatt $S(s)$. Die unten auftretende Konstante $K(t)$ ist gleichbedeutend mit $\zeta(-t)$, d. i. mit seiner Erweiterung der Funktion $\zeta(s)$, vgl. Kinkelin, Allg. Theorie der harmonischen Reihen, 1862, S. 4.

2) Hinsichtlich ihrer Geschichte vgl. Enzyklopädie der math. Wissensch. Bd. II. 1. S. 171.

Diese Reihe gehört zu den alternierenden, deren Glieder dem Betrage nach beständig und ins Unendliche abnehmen (Arithmetik IX. 8). Daher ist a_k positiv und kleiner als $1 : 2k^2$. Mithin konvergiert die Reihe Σa_k, denn es konvergiert die Reihe (1) für $s = 2$. Folglich hat X_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert c und zwar ist

$$c = \lim_{n=+\infty} X_n = X_l + \sum_{l}^{\infty} a_k \quad (l \geqq 1). \tag{3}$$

Setzt man $X_n = c + w_n$, d. i.

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{r} - (ln + c) = w_n,$$

so hat w_n zufolge der Formel (3) bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null. Daher heißt der Ausdruck $ln + c$ gegenüber der Summe $\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{r}$ asymptotisch.

Eine zur Berechnung der Eulerschen Konstanten bequemere Formel erhält man, wenn man sich in (3) $l \geqq 2$ denkt und das durch Σa_k dargestellte Schema von unbegrenzt vielen unendlichen Reihen nach Vertikalreihen ordnet. Das ist zulässig, indem es der Cauchyschen Bedingung (Arithmetik IX. 11) Genüge leistet. Ersetzt man nämlich in a_k alle Glieder durch ihre absoluten Werte, so findet man

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{g k^g} = \frac{1}{k^2} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{g k^{g-2}} = \frac{1}{k^2} A_k \quad (k = l,\ l+1, \cdots).$$

Die aus diesen Summen gebildete unendliche Reihe konvergiert, da $\lim A_k$ bei $\lim k = +\infty$ endlich nämlich $\frac{1}{2}$ ist (S. 399, Übg. 37). — Mithin ergibt sich aus (3)

$$c = \lim_{g=+\infty} X_n = X_l + \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^g}{g} S_l(g) \quad (l \geqq 2) \tag{4}$$

In der hier vorkommenden unendlichen Reihe ist der Rest kleiner als sein erstes Glied, da sie auch zu den oben erwähnten alternierenden gehört. Man hat aber

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = l,\ l+1, \cdots),$$

$$S_l(2) + \sum_{l}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{1}{l-1}, \text{ also } S_l(2) < \frac{1}{l-1}.$$

Für $g > 2$ ergibt sich daraus

$$S_l(g) < \frac{1}{l^{g-2}} \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{(l+1)^2} + \cdots \right) = \frac{1}{l^{g-2}} S_l(2) < \frac{1}{(l-1)l^{g-2}}.$$ [1])

1) Falls g nicht groß ist, ist genauer die Ungleichung

$$S_l(g) < 1 : (g-1)(l-1)^{g-1} \quad (g \geqq 2),$$

welche aus den in der 8. Übung „Arithmetik" S. 272 angeführten Formeln folgt.

Um asymptotische Ausdrücke für die Summe $\sum_1^{n-1} r^t$ $(t=\varrho+\sigma i)$ im Falle daß $\varrho \geqq -1$, t selbst aber nicht -1 ist, aufzufinden, erinnere man sich an die Formeln

$$\sum_1^{n-1} r^0 = n-1, \qquad \sum_1^{n-1} r = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}, \tag{4a}$$

$$\sum_1^{n-1} r^t = \frac{n^{t+1}}{t+1} - \frac{n^t}{2} + \sum_1^{h} (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} n^{t-2r+1}, \tag{4b}$$

worin t eine natürliche Zahl $\geqq 2$ bedeutet und die ganze Zahl h so zu wählen ist, daß $t-2h+1>0$, $t-2h-1 \leqq 0$ ist (vgl. die erste Formel auf S. 166).

In der Tat besteht der

3. Satz. „Genügt der reelle Teil ϱ von t der Bedingung $-1 \leqq \varrho < 0$, ohne daß jedoch $t=-1$ ist, so hat der Ausdruck

$$X_n(t) = \sum_1^{n-1} r^t - \frac{n^{t+1}}{t+1} \tag{5}$$

bei $\lim n = \infty$ einen endlichen Grenzwert $K(t)$. Ist $0 \leqq \varrho < 1$, so gilt dasselbe vom Ausdrucke

$$X_n(t) = \sum_1^{n-1} r_t - \frac{n^{t+1}}{t+1} + \frac{1}{2} n^t.^{1}) \tag{6}$$

Ist $\varrho \geqq 1$, so hat der Ausdruck

$$X_n(t) = \sum_1^{n-1} r^t - \left[\frac{n^{t+1}}{t+1} - \frac{1}{2} n^t + \sum_1^{h} (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} n^{t-2r+1} \right], \tag{7}$$

wo $B_1, B_2, \cdots$ die Bernoullischen Zahlen und h die kleinste natürliche Zahl bedeutet, wofür $t-2h-1$ einen negativen reellen Teil hat, bei

$$\lim n = +\infty$$

einen endlichen Grenzwert $K(t)$."

Für die Summe $\sum_1^{n-1} r^t$ sind in den soeben unterschiedenen Fällen

---

1) Wenn man in (5) $t=0$ setzt, so findet man $X_n(0) = -1$, so daß auch $\lim_{n=+\infty} X_n(0) = -1$ ist. Aus (6) ergibt sich $X_n(1) = 0$ und mithin $\lim_{n=+\infty} X_n(1) = 0$. Um $K(t)$ auch für die Werte $t=0$ und $t=1$ eindeutig zu erklären, beschränken wir uns indes auf die im Texte getroffenen Festsetzungen. Ihnen zufolge ist $K(0) = -\frac{1}{2}$, $K(1) = -\frac{1}{12}$.

Fällen asymptotisch bezw. die Ausdrücke

$$\frac{n^{t+1}}{t+1} + K(t), \quad \frac{n^{t+1}}{t+1} - \frac{1}{2}n^t + K(t) \quad \text{usw.}$$

Es genügt, den Beweis dieses Satzes im dritten Falle zu führen. Dabei dürfen wir h so bestimmen, daß

$$\varrho - 2h + 1 \geqq 0, \qquad \varrho - 2h - 1 < 0$$

oder

$$\varrho + 1 \geqq 2h > \varrho - 1$$

ist. Setzt man

$$\varrho = m + \mu' \qquad (0 \leqq \mu' < 1),$$

unter m eine natürliche Zahl verstanden, so hat man demnach

$$m + 1 \geqq 2h \geqq m;$$

es ist $2h$ gleich m oder $m+1$, je nachdem m gerade oder ungerade ist. — Setzt man

$$X_{k+1}(t) - X_k(t) = a_k \qquad (k \geqq 2),$$
$$X_n(t) = X_l(t) + a_l + a_{l+1} + \cdots + a_{n-1} \qquad (l \geqq 2),$$

so hat man

$$a_k = k^t - \frac{(k+1)^{t+1} - k^{t+1}}{t+1} + \frac{(k+1)^t - k^t}{2} - \sum_1^h (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} [(k+1)^{t-2r+1} - k^{t-2r+1}]. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck wird nach fallenden Potenzen von k entwickelt. Es ist für alle Werte $k \geqq 2$

$$(k+1)^{t-p} - k^{t-p} = k^{t-p} \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{t-p} - 1 \right\} = \sum_{p+1}^{\infty} \binom{t-p}{g-p} k^{t-g}.$$

Nimmt man hier nacheinander $p = -1, 0, 1, 3, \cdots 2h-1$, setzt die bezüglichen Ausdrücke in (8) ein und ordnet nach fallenden Potenzen von k, so heben sich die Koeffizienten derjenigen Potenzen von k, deren Exponenten nicht-negativen reellen Teil besitzen, d. i. von

$$k^{t+1}, k^t, \ldots k^{t-2h+1}$$

auf. Der Koeffizient von k^{t-g} ist nämlich

$$-\frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1} + \frac{1}{2}\binom{t}{g} - \sum_1^f (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} \binom{t-2r+1}{g-2r+1},$$

wo, so lange $2 \leqq g \leqq 2h-1$ ist, $f = \frac{1}{2}g$ oder $\frac{1}{2}(g-1)$, je nachdem g gerade oder ungerade, wenn aber $g \geqq 2h$, $f = h$ ist. Zufolge der Formel

$$\frac{1}{2r}\binom{t}{2r-1}\binom{t-2r+1}{g-2r+1} = \frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}\binom{g+1}{2r}$$

geht der vorstehende Ausdruck über in

$$-\frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}\left\{1-\frac{g+1}{2}+\sum_{1}^{f}(-1)^{r-1}\binom{g+1}{2r}B_r\right\}$$

$$=-\frac{1}{t+1}\binom{t+1}{g+1}D_g=-\frac{1}{g+1}\binom{t}{g}D_g.$$

So lange $g \leqq 2h+1$ ist, ist die in den Klammern stehende Summe D_g nach IV. 12 Gleichung (7) Null. Somit ergibt sich

$$a_k=-\sum_{2h+2}^{\infty}\frac{1}{g+1}\binom{t}{g}\frac{D_g}{k^{g-t}}\cdot{}^{1}) \tag{9}$$

Ist t eine natürliche Zahl m, so ist $2h$ gleich m oder $m+1$, je nachdem m gerade oder ungerade. Zufolge der Formel (4b), worin bei geradem m $2h=m$, bei ungeradem m $2h=m-1$ ist, verschwindet mithin bei geradem m $X_n(m)$ identisch, während es bei ungeradem m $(=2q-1)$ gleich $(-1)^q B_q : 2q$ ist. Demnach ist auch

$$K(m)=0 \quad \text{bezw.} \quad (-1)^q B_q : 2q.$$

Die Formel (9) zeigt, daß für $t=m$ $a_k=0$ ist, da bei dem Umstande, daß $g \geqq 2h+2 > m$ ist, $\binom{m}{g}$ Null ist.

Wenn t keine natürliche Zahl ist, so konvergiert die unendliche Reihe in (9) absolut, weil ihr g^{tes} (allgemeines) Glied nach (8) durch Addition der g^{ten} Glieder von $h+2$ absolut konvergenten Reihen entsteht. Daher ist

$$|a_k| \leqq \sum_{2h+2}^{\infty}\frac{1}{g+1}\left|\binom{t}{g}D_g\right|\frac{1}{k^{g-\varrho}}=\frac{1}{k^{2h+2-\varrho}}\sum_{2h+2}^{\infty}\frac{1}{g+1}\left|\binom{t}{g}D_g\right|\frac{1}{k^{g-2h-2}}. \tag{10}$$

Hieraus erhellt, daß die unendliche Reihe $\Sigma|a_k|$ konvergiert. Denn es konvergiert, da $2h+2-\varrho>1$ ist, die unendliche Reihe $\Sigma k^{-2h-2+\varrho}$ und es hat der in (10) neben $1:k^{2h+2-\varrho}$ stehende Ausdruck bei $\lim k=+\infty$ den endlichen Grenzwert

$$\frac{1}{2h+3}\left|\binom{t}{2h+2}D_{2h+2}\right|.$$

Da die Reihe Σa_k konvergiert (und zwar absolut), so hat $X_n(t)$ bei $\lim n=+\infty$ in der Tat einen endlichen Grenzwert $K(t)$ und zwar ist

$$K(t)=\lim_{n=+\infty}X_n(t)=X_l(t)+\sum_{l}^{\infty}a_k \qquad (l \geqq 2). \tag{11}$$

---

1) Da D_{g-1} eine ganze Funktion $2h^{\text{ten}}$ Grades von g ist, worin g^{2h} den Koeffizienten $(-1)^{h-1}B_h : (2h)!$ besitzt, so hat $(-1)^{h-1}D_{g-1}$ bei $\lim g=+\infty$ den Grenzwert $+\infty$.

Diese Formel gilt auch für die Ausdrücke (5) und (6), man hat nur in (9) für D_g bezw. 1 und $1 - \frac{1}{2}(g+1)$ zu setzen.

4) „Die Formel (11) läßt sich in die für die Berechnung von $K(t)$ bequemere Gestalt bringen:

$$K(t) = X_l(t) - \sum_{2k+2}^{\infty} \frac{1}{g+1}\binom{t}{g} D_g S_l(g-t)^{\alpha} \quad (l \geqq 2). \tag{12}$$

In der Tat bildet Σa_k in (11) ein Schema von unendlich vielen unendlichen Reihen, welches der Cauchyschen Bedingung („Arithmetik" S. 254, 390) genügt und somit auch nach Vertikalreihen geordnet werden darf. Wir haben die Reihe in (10) für $k = l,\ l+1, \cdots$ zu betrachten. Multiplizieren wir ihre Glieder mit $k^{2k+2-\varrho}$, so erhält man die konvergente Reihe

$$A_k = \sum_{2k+2}^{\infty} \frac{1}{g+1} \binom{t}{g} D_g \frac{1}{k^{g-2k-2}}.$$

Die aus den Summen der in Rede stehenden Reihen gebildete Reihe, d. i.

$$\frac{A_l}{l^{2k+2-\varrho}} + \frac{A_{l+1}}{(l+1)^{2k+2-\varrho}} + \cdots + \frac{A_k}{k^{2k+2-\varrho}} + \cdots$$

konvergiert, weil $\sum \frac{1}{k^{2k+2-\varrho}}$, wie bemerkt, konvergiert und A_k bei $\lim k = +\infty$ einen endlichen Grenzwert hat.

Anmerkung. Unter einer harmonischen Reihe im allgemeinen versteht man eine Reihe, deren Glieder die gleichen Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung sind, d. i.

$$a^t, (a+d)^t, (a+2d)^t, \cdots (a+(n-1)d)^t, \cdots$$

Nimmt man a und d so an, daß der von a aus über $a+d$ ins Unendliche gezogene Halbstrahl die negative reelle Achse nicht schneidet, so erhält man hieraus, indem man durch den Hauptwert d^t dividiert und $a : d = x$ setzt, die Hauptwerte

$$x^t, (x+1)^t, (x+2)^t, \cdots [x+n-1]^t, \cdots$$

Für die Reihe $\Sigma(x+n-1)^t$ gelten ähnliche Sätze, wie für die soeben betrachtete Σn^t. Vgl. Übung 33) bis 36) S. 397.

Übungen zum VIII. Abschnitt.

1) „Es sind alle für jedes reelle und positive ξ eindeutigen Funktionen $f(\xi)$ zu ermitteln, welche die Funktionalgleichung $f(\xi\eta) = f(\xi) \cdot f(\eta)$ bei irgend welchen reellen und positiven Werten von ξ und η erfüllen und für den reellen und positiven, von 1 verschiedenen Wert β den von Null verschiedenen komplexen Wert c annehmen" (Cauchy, Cours d'Analyse S. 271). Die Aufgabe wird durch die Substitution $\xi = e^v$, $\eta = e^w$ auf die in Nr. 1 behandelte zurückgeführt. Lösungen:

$$f(\xi) = e^{l\xi \cdot Lc : l\beta}, \tag{1}$$

worin Lc einen beliebigen, jedoch fest gewählten Logarithmus von c bedeutet. Die rechte Seite der Formel (1) stellt mithin unendlich viele Funktionen dar. Man stelle ihre trigonometrische Form her.

2) Die Funktionen $\cos(xi)$, $\sin(xi) : i$ werden gewöhnlich als hyperbolischer Kosinus und Sinus bezeichnet. Man hat demnach

$$\text{ch. } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \quad \text{sh. } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Für diese Funktionen gelten ebenfalls die S. 73 angezeigten Formeln.

3) Die Analysis braucht die Funktionen $\cos x$, $\sin x$ auch für die reellen Werte von x nicht aus der Geometrie zu entlehnen, sondern kann sie auch dafür durch die beiden ganzen Potenzreihen (28) S. 345 erklären. Sie bedarf also der Trigonometrie nicht, um die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zu entwickeln. Es verlohnt sich der Mühe, diese Lehre ohne die Hilfe der Trigonometrie darzustellen (vgl. M. Stern, Lehrb. d. algebr. Analysis 1860, Nr. 95 f.). Hierbei benötigt man den folgenden Satz, dessen Beweis sich auf I. 15 und Übung 20) S. 242 stützt. „Es gibt nur eine Wurzel der Gleichung $C(x) = 0$ zwischen 0 und $\sqrt{6 - \sqrt{12}}$."

4) a) Alle monogenen analytischen Funktionen der komplexen Veränderlichen x, $f(x)$, zu ermitteln, welche die Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

erfüllen. — b) Desgleichen diejenigen, welche die Gleichung

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

erfüllen.

Man setze wie S. 74 $x = e^u$, $y = e^v$.

5) Alle Paare von monogenen analytischen Funktionen $f(x)$, $g(x)$ der komplexen Veränderlichen x zu bestimmen, welche die beiden Gleichungen

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \quad g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \quad (2)$$

befriedigen. — **Anleitung.** Man führe die Hilfsfunktionen

$$F(x) = f(x) + ig(x), \qquad G(x) = f(x) - ig(x)$$

ein. Dann kommt man auf die in der Note S. 341 erwähnte Aufgabe zurück.

Die allgemeinen Ausdrücke für die gesuchten Funktionen $f(x)$, $g(x)$ hängen von zwei willkürlichen Konstanten ab. Sollen bloß $\cos x$ und $\sin x$ erklärt werden, so müssen daher zu den Formeln (2) noch zwei Bedingungen treten. Und zwar: 1) es sei $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ {äquivalent damit: $f(x)$ sei eine gerade, $g(x)$ eine ungerade Funktion von x}; 2) es sei

$$\lim_{x=0} \{f(x) : x\} = 1.$$

Außer den allgemeinen Lösungen der Gleichungen (2) gibt es noch singuläre.

6) „Alle monogenen analytischen Funktionen $f(x)$ von x zu ermitteln, welche die Funktionalgleichung

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \tag{3}$$

befriedigen." Die allgemeine Lösung ist $f(x)=\cos cx$ mit der willkürlichen Konstanten c, die singuläre $f(x)=0$.

Der Hauptsache nach ist diese Aufgabe durch Übung 9) S. 238 erledigt. Hier ist nur zu zeigen, daß $f(x)$ bei $x=0$ holomorph sein muß.

7) Der Funktionalgleichung

$$f(x+y)^2+f(x)^2+f(y)^2-2f(x)f(y)f(x+y)=1$$

genügen bloß die beiden monogenen analytischen Funktionen $f(x)=\cos cx$ mit der willkürlichen Konstanten c und $f(x)=-\frac{1}{2}$, die erstere als die allgemeine, die letztere als die singuläre Lösung.

8) Welche Gleichung besteht zwischen $\sin x$, $\sin y$, $\sin(x+y)$? (Additionstheorem des Sinus nach Nr. 6.)

9) Welche monogenen analytischen Funktionen befriedigen die Funktionalgleichung

$$(1-f(x)f(y))\,f(x+y)=f(x)+f(y)?$$

Antwort. $f(x)=\tan cx$ und $f(x)=+i$ oder $-i$.

10) Die beiden Koordinaten von $l(\xi+\eta i)$ anzuschreiben. Vgl. S. 104 Übung 16). Ist $\xi>0$, so hat man

$$l(\xi+\eta i)=\tfrac{1}{2}l(\xi^2+\eta^2)+i\arctan\frac{\eta}{\xi}\quad\text{usw.}$$

11) Bestimmung der Koeffizienten der logarithmischen Reihe durch die Bemerkung, daß sie aus der Auflösung der Gleichung

$$e^y-1=x$$

nach y hervorgeht, nach Formel (21) S. 235.

12) Setzt man

$$1+r\cos\theta=q\cos h,\qquad r\sin\theta=q\sin h,$$

worin r eine komplexe Zahl, deren Betrag 1 nicht überschreitet, sein soll, so ist

$$q^2=1+2r\cos\theta+r^2.$$

Dürfen wir q frei unter den Werten $\sqrt{q^2}$ und $-\sqrt{q^2}$ wählen, so können wir

$$h=\arctan\{r\sin\theta:(1+r\cos\theta)\}$$

setzen. Alsdann ist

$$\left.\begin{aligned} l(q^2)&=l(1+re^{\theta i})+l(1+re^{-\theta i})+2m\pi i,\\ 2hi&=l(1+re^{\theta i})-l(1+re^{-\theta i})+2m'\pi i,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

unter m, m' ganze Zahlen verstanden. Wenn man in der Formel (a) S. 359) für x $re^{\theta i}$ und dann $re^{-\theta i}$ einführt, so erhält man für die Summe und die Differenz der obigen Logarithmen die auf den rechten Seiten der Formeln (8) S. 365 befindlichen Reihen, nur ϱ durch r vertreten. Mit Rücksicht auf diese Formeln schließt man auf Grund des Satzes S. 127, daß $m=m'=0$ ist. Das heißt es gelten die Formeln (8) auch für komplexe Werte von ϱ, deren Betrag 1 nicht übersteigt, die zwei Werte $\varrho=-e^{\pm\theta i}$ jedoch ausgenommen.

Setzt man in den Gleichungen (4) $m = m' = 0$, so erhält man die Hauptwerte $l(1 + re^{\theta i})$ und $l(1 + re^{-\theta i})$. Damit ergeben sich die Hauptwerte $(1 + re^{\theta i})^s$ und $(1 + re^{-\theta i})^s$. Führt man nun in die binomische Reihe (1) S. 356 nacheinander $x = re^{\theta i}$ und $x = re^{-\theta i}$ ein, addiert und subtrahiert die neuen Gleichungen, so erhält man zwei Formeln, die mit den Formeln (6) S. 363 zusammenfallen, nur daß μ und ϱ bezw. durch die komplexen Zahlen s, r ersetzt sind, wobei $|r| < 1$ ist. — Unter welchen Umständen gelten die soeben erwähnten Formeln auch für Werte r vom Betrage 1?

13) Für alle x, die nicht der negativen imaginären Achse angehören, gilt die Formel

$$D_x x^s = s x^{s-1}.$$

Sie ergibt sich entweder aus der Entwicklung von x'^s in eine ganze Potenzreihe von $x' - x$ oder aus den Formeln $x^s = e^{s l x}$ und (d) S. 240.

14) Die Koordinaten von $\sqrt[s]{\alpha + \beta i}$, wobei die Beträge der reellen Zahlen α, β untereinander und von Null verschieden sein sollen, sind mit Hilfe des binomischen Satzes in unendliche Reihen mit reellen Gliedern zu entwickeln (vgl. „Arithmetik" S. 291).

15) Man beweise den Satz über die homogenen Funktionen n^{ter} Dimension der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_m$ (vgl. S. 146) für den Fall, daß n eine nicht-ganze reelle oder komplexe Zahl ist.

16) Der von Cauchy a. d. S. 370 a. O. eingeführte Arcus tangens

$$\operatorname{arc\,tan} = \frac{1}{2i} l \frac{1 + xi}{1 - xi}$$

stimmt mit dem S. 366 erklärten Hauptwerte desselben stets überein, außer wenn das Argument des Logarithmus eine negative Zahl ist, also x eine rein imaginäre Zahl ηi ist und η nicht zwischen -1 und $+1$ liegt. In diesem Falle ist der Unterschied der beiden Hauptwerte gleich π.

17) Ist x weder 0 noch ∞ und τ reell, so hat man

$$\lim_{\tau = +\infty} \operatorname{arc\,tan} x\tau = +\frac{\pi}{2} \text{ oder } -\frac{\pi}{2},$$

je nachdem die reelle Koordinate von x positiv ist oder nicht. Diese Formel folgt sofort aus (11*) S. 367.

Setzt man

$$\lim_{\tau = +\infty} (\operatorname{arc\,tan} x\tau)^2 = f(x),$$

so hat man $f(0) = 0$, während für jedes andere endliche x $f(x) = \frac{\pi^2}{4}$ ist.

18) In allen Punkten der x-Ebene außer denen, welche von der imaginären Achse nach Wegnahme der Strecke $(-i, +i)$ übrig bleiben, und $x = \pm i$ selbst gilt die Formel

$$D_x \operatorname{arc\,tan} x = 1 : (1 + x^2).$$

Man gebe auch an, für welche Werte von x' der Hauptwert arc tan x' sich in eine ganze Potenzreihe von $x' - x$ (unter x irgend einen endlichen Punkt außer $\pm i$ verstanden) entwickeln läßt. Vgl. das in Nr. 9* über die Entwicklung von $l_0 x'$ nach Potenzen von $x' - x$ Bemerkte.

19) „Wenn man x einen Wert, dessen Betrag die Einheit nicht übersteigt, außer $x = \pm 1$, erteilt, so liegt der reelle Teil des ersten Hauptwertes des Arcus sinus x, d. i. von $\arcsin x$ (Formel (13) S. 370) zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$." — Beweis durch Berechnung desselben bei der Annahme $x = \varrho\{\cos\theta + i\sin\theta\}$ $(\varrho \leqq 1)$.

20) Für welche Werte von x läßt sich die Funktion $\arcsin x$ nach der Formel (13) S. 370 zufolge des Satzes in V. 7 (indem man für $\sqrt{1-x^2}$ die bezügliche binomische Reihe setzt und den so erhaltenen Ausdruck mittels der logarithmischen Reihe S. 359 (a) entwickelt) in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln? — Antwort: Falls $|x| < 1 : \sqrt{2} = 0{,}7071\ldots$ ist.

21) Die Gleichung $x = \cos y$ liefert die Lösungen

$$y = \operatorname{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2k\pi \quad (k \text{ jede ganze Zahl}).$$

Der erste und zweite Hauptwert des Arcus cosinus x werden durch die Formeln

$$\arccos x = \frac{1}{i} l(x + i\sqrt{1-x^2}), \qquad \overline{\arccos} x = \frac{1}{i} l(x - i\sqrt{1-x^2})$$

erklärt. — Diese Funktionen sind genau in den nämlichen Punkten unstetig, wie die Funktion $\arcsin x$ (S. 371).

22) Es ist

$$\arccos x + \overline{\arccos} x = 0,$$

ausgenommen die Punkte auf dem Stücke der negativen reellen Achse, welches sich vom Punkte -1 ins Unendliche erstreckt. Dort hat diese Summe den Wert 2π.

23) Man hat in der ganzen Ebene mit Ausschluß von $x = \infty$, wofür weder $\arcsin x$ noch $\arccos x$ erklärt ist,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

24) Aus den Formeln (13) und (13*) S. 370 ergibt sich, daß für alle Werte von x außer denen, welche von der reellen Achse nach Wegnahme der Strecke $(-1, +1)$ übrig bleiben, und $x = \pm 1$ selbst,

$$D_x \arcsin x = 1 : \sqrt{1-x^2}, \qquad D_x \overline{\arcsin} x = -1 : \sqrt{1-x^2}$$

ist. Vgl. Formel (g) S. 375.

Man gebe auch an, für welche Werte von x' sich $\arcsin x'$ in eine ganze Potenzreihe von $x' - x$ (unter x irgend einen endlichen Punkt außer ± 1 verstanden) entwickeln läßt.

25) Für welche reelle und komplexe Werte von x gilt die Formel

$$\arcsin x = \arctan\left(x : \sqrt{1-x^2}\right)?$$

26) Beispiele zusammengesetzter Funktionen von x, welche in mehrere monogene Funktionen von x zerfallen, vgl. S. 326.

Solche sind, wenn m, n, p natürliche Zahlen, wovon die letzte größer als 1 ist, bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \sqrt[mp]{x^{np}} = \sqrt[m]{x^m} \cdot e^{\frac{2r\pi}{mp}i} \\ \text{b)} & L(x^p) = pLx + 2r\pi i \end{array}\right\} \quad (r = 0, 1, \cdots p-1).$$

Die beiden Ausdrücke rechts liefern demnach je p verschiedene monogene Funktionen von x. Daß z. B. die sämtlichen Werte von $L(x^p)$ nicht einer monogenen Funktion angehören, erkennt man daraus, daß, wenn man x von dem Punkte a aus einen vollen Kreis um den Nullpunkt in positivem Sinne beschreiben läßt, der für den Punkt a gewählte Wert $l_0(a^p) = pla + 2r_0\pi i$ sich um $p \cdot 2\pi i$ ändert. In der Tat, beschreibt x den p^{ten} Teil dieses Kreises, so durchläuft x^p denselben ganz, so daß $l_0(a^p)$ schon in $l_0(a^p) + 2\pi i$ übergeht.

Andere Beispiele sind: c) $\sqrt[2]{e^x} = e^{x:2}$ und $-e^{x:2}$, d) $L(e^x) = x + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, kurz jede beliebige ganze Zahl). Beschreibt x einen Kreis um den Nullpunkt, so durchläuft $y = e^x$ eine einfache geschlossene Linie, welche den Punkt $y = 0$ nicht umgibt.[1]) Geht man vom Punkte a jenes Kreises mit dem Werte $l_0(e^x)$ aus, so kehrt daher $L(e^x)$ mit ihm dahin zurück.

e) $\operatorname{Arc\,tan}[x : \sqrt[2]{1-x^2}] = \operatorname{Arc\,sin} x$ und $\pi + \operatorname{Arc\,sin} x$.

27) a) Die Funktion

$$(1-x)\, e^{x+\frac{x^2}{2}+\cdots\frac{x^{m-1}}{m-1}} \qquad (m \text{ ganze Zahl größer als } 1)$$

läßt sich entwickeln in eine beständig konvergente Potenzreihe von x:

$$1 - \frac{x^m}{m} - \cdots.^2)$$

Anleitung. Man setze $1 - x = e^{l(1-x)}$ und darin für $l(1-x)$ die Reihe nach Formel (a) S. 359.

b) Der Ausdruck

$$(1+x)^{y:x} = e^{y\,l(1+x):x},$$

worin y nicht 0 sei, läßt sich nach Nr. 14a) für alle x, deren Betrag kleiner als 1 ist, in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln. Es ist ferner nachzuweisen, daß ihre Summe für alle diese x gleich ist der binomischen Reihe (1) S. 356, wenn darin s durch $y : x$ ersetzt wird. — Anleitung: Man setze nach der Formel (a) S. 359

$$l(1+x) : x = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots.$$

---

1) Diese Kurve wird nämlich von einem im Punkte $y = 0$ entspringenden Halbstrahle, wenn überhaupt, so in zwei Punkten geschnitten.

2) Weierstraß Werke II. S. 94.

c) Die Funktion $e^{-1:x^2}$ verliert bei $x = 0$ den Charakter einer ganzen Funktion, in allen übrigen Punkten der Ebene mit Einschluß von $x = \infty$ ist sie holomorph. Warum?

28) a) Man beweise mit Hilfe des 1. Satzes S. 323 die in der 12) Übung berührte Formel

$$\arctan \frac{x \sin\theta}{1 + x\cos\theta} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \sin n\theta,$$

worin x jeder Wert, dessen Betrag nicht größer als 1 ist, außer $x = -e^{\theta i}$ und $x = -e^{-\theta i}$ sein darf. — Durch Gleichsetzung des Koeffizienten von x^n in der ganzen Potenzreihe rechts mit dem der nämlichen Potenz von x in jener Potenzreihe, welche sich für die Funktion $\arctan\{x\sin\theta : [1 + x\cos\theta]\}$ nach dem Satze in V. 7 ergibt, erhält man die Formel

$$\sin n\theta = n \sin\theta \cos\theta^{n-1} - \binom{n}{3} \sin\theta^3 \cos\theta^{n-3} + \cdots \text{ (Arithm. S. 353)}.$$

b) Die Funktion $l\frac{l(1+x)}{x}$ läßt sich für alle x, deren Betrag kleiner als 1 ist, in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln.

29) Independente Formeln für die Koeffizienten der allgemeinen Polynomialformel (S. 381):

$$(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)^s = 1 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots,$$

$$e_n = \sum_1^n r\, s(s-1)\cdots(s-r+1) \sum \frac{1}{p_1!\, p_2! \cdots p_n!} c_1^{p_1} c_2^{p_2} \cdots c_n^{p_n},$$

worin die zweite Summe auszudehnen ist auf alle Systeme von nichtnegativen ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$, welche den beiden Gleichungen

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = r, \quad p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = n$$

Genüge leisten.

30) Die Funktion $-1 : l(1-x)$ liefert eine für alle x, deren Betrag kleiner als 1 ist, konvergente Reihe nach ganzen Potenzen von x, die mit dem Gliede x^{-1} anfängt. Vgl. S. 333 Übung 6 a).

31) Man denke sich in den Formeln 5)—12) und 16) S. 70/71 die Veränderliche x und die Konstanten komplexer Werte fähig[1]) und beweise sie dadurch, daß man die hinter dem Zeichen lim stehende Funktion in 5), 6), 8), 10)—12), 16) in eine ganze Potenzreihe von x, in 7) in eine solche von $x - 1$, in 9) in eine solche von $x - a$ entwickelt.

Auf ähnliche Weise beweise man die Formeln:

---

1) In 5) soll a im Sinne von Arithmetik S. 280 positiv sein, d. h. entweder positiven reellen Teil oder falls dieser Teil Null ist, positiven imaginären Teil haben, d. i. es sei $a = \sqrt{a^2}$.

$$\text{a)}\ \lim_{x=0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2},$$

$$\text{b)}\ \lim_{x=0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin x^2}{x^6}=\frac{1}{18}.$$

32) Durch Entwicklung der bezüglichen Funktionen nach ganzen Potenzen von $1:x$ bei Beschränkung auf positive reelle Werte von x beweise man die Formeln 1), 2) S. 28 und die folgenden:

$$\text{a)}\ \lim_{x=+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2-1}-3x)=\frac{1}{2},$$

$$\text{b)}\ \lim_{x=+\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{x^5-x^4-3x^2+x+2}{x^2-x-1}}-x\right]=0.$$

Anleitung. Man setze z. B.

$$\sqrt{x^2+a}=x\left(1+\frac{a}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

und entwickle den 2. Faktor rechts nach dem binomischen Satze (Nr. 9) in eine ganze Potenzreihe.

33) Die harmonische Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n\frac{1}{(x+n)^s},$$

worin x weder 0 noch eine negative ganze Zahl sein soll, konvergiert (und zwar absolut) oder divergiert, je nachdem der reelle Teil von s größer als 1 ist oder nicht. (Beweis ähnlich wie im Falle, daß $x=1$ ist.)

34) Bedeutet s eine komplexe Zahl, deren reeller Teil größer als 1 ist, und wird

$$\sum_1^{n-1}{}_r\frac{1}{(x+r)^s}+\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{(x+n)^{s-1}}=X_n,$$

$$X_{k+1}-X_k=\frac{1}{(x+k)^{s-1}}\sum_2^\infty{}_g\frac{(-1)^g}{g}\binom{s+g-2}{g-1}\frac{1}{(x+k)^g}=u_k$$

gesetzt, so besteht die Formel (vgl. S. 385 2. Satz)

$$\sum_1^\infty{}_r\frac{1}{(x+r)^s}=X_l+\sum_l^\infty{}_k u_k\quad(l\geqq 2).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Formel

$$\lim_{s=1}(s-1)\sum_1^\infty{}_r\frac{1}{(x+r)^s}=1,$$

welche für reelle Werte von s $(s>1)$ und x Dirichlet (Journal f. r. u. a. Math. 53, S. 130) aufgestellt hat.

35) Es sei $t = \varrho + \sigma i$. Bedeutet $Y_n(x,t)$ im Falle, daß $-1 \leqq \varrho < 0$, ohne daß jedoch $t = -1$ ist, den Ausdruck

$$\sum_0^{n-1} (x+r)^t - \frac{(x+n)^{t+1}}{t+1},$$

im Falle, daß $0 \leqq \varrho < 1$ ist, den Ausdruck

$$\sum_0^{n-1} (x+r)^t - \frac{(x+n)^{t+1}}{t+1} + \frac{1}{2}(x+n)^t,$$

endlich im Falle, daß $\varrho \geqq 1$, den Ausdruck

$$\sum_0^{n-1} (x+r)^t - \left[\frac{(x+n)^{t+1}}{t+1} - \frac{1}{2}(x+n)^t + \sum_1^h (-1)^{r-1} \binom{t}{2r-1} \frac{B_r}{2r} (x+n)^{t-2r+1}\right]$$

(worin die ganze Zahl h wie S. 387 zu wählen ist), so hat $Y_n(x,t)$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert, der mit $F(x,t)$ bezeichnet werde. Dabei soll, wenn ϱ nicht positiv ist, x von 0 und jeder negativen ganzen Zahl verschieden sein. — Der Beweis ähnlich wie an den Ausdrücken (5)—(7) S. 387. Man bildet $Y_{k+1}(x,t) - Y_k(x,t)$ und entwickelt diese Differenz zunächst nach fallenden Potenzen von $x+k$.

Ist $\varrho > 0$, so hat man $F(0,t) = K(t)$ (S. 387). Man findet leicht, daß für jeden der hier angegebenen Werte von t $F(1,t) = K(t)$ ist.

36) Die allgemeine Bernoullische Funktion $B(x,t)$ nach Kinkelin.[1]) Sie wird auf folgende Weise erklärt. Ist der reelle Teil von $t = \varrho + \sigma i$ kleiner als -1, so setzt man

$$\sum_1^\infty n^t - \sum_0^\infty (x+n)^t = B(x,t); \qquad (\alpha)$$

ferner sei

$$B(x,-1) = c - \lim_{n=+\infty} \left[\sum_0^{n-1} \frac{1}{x+r} - l(x+n)\right], \qquad (\beta)$$

wo c die Eulersche Konstante bedeutet. Wenn $\varrho \geqq -1$, den Wert $t = -1$ ausgenommen, so sei

$$B(x,t) = F(1,t) - F(x,t) = K(t) - F(x,t), \qquad (\gamma)$$

unter $F(x,t)$ den in der Übung 35) eingeführten Grenzwert verstanden. Dabei soll, wenn ϱ nicht positiv ist, x von 0 und jeder negativen ganzen Zahl verschieden sein. — Zufolge der Erklärungen (α)—(γ) ist $B(1,t)$

1) A. d. S. 385 a. O. S. 8.

$= 0$ und bei positivem ϱ ist zufolge der Formel (α) und der Schlußbemerkung in Übung 35) auch $B(0,t) = 0$.

Ist t Null oder eine natürliche Zahl, so hat man

$$B(x,t) = \varphi_{t+1}(x) : (t+1),$$

worin $\varphi_{t+1}(x)$ die Bernoullische ganze Funktion von x in IV. 12 bezeichnet.

Man zeige, daß $B(x,t)$ bei konstantem t, falls t weder 0 noch eine natürliche Zahl ist, als Funktion von x in allen eigentlichen Punkten der x-Ebene außer denjenigen, welche der Null und den negativen ganzen Zahlen entsprechen, holomorph ist.

37) Hat A_k die nämliche Bedeutung wie S. 386, so gelten die Ungleichungen

$$0 < \mathsf{A}_k - \tfrac{1}{2} < 1 : 3(k-1).$$

38) Da wir den Satz S. 318, daß jede algebraische Funktion von x monogen ist, nicht bewiesen haben, so müssen wir die Monogenität der bis jetzt vorgekommenen algebraischen Funktionen von x noch dartun. Was $\sqrt[*]{x}$ und $\sqrt[*]{1-x^2}$ betrifft, so kann dies auf Grund der Bemerkungen über die Stetigkeit ihrer Hauptwerte (S. 127, 371) in ähnlicher Weise wie beim Logarithmus (Nr. 9*) geschehen. Ihre Monogenität ergibt sich indes auch aus dem Satze b) unten.

Bezeichnet $F(x)$ eine ganze Funktion von x, so gelten die Sätze: a) Ihr Logarithmus $LF(x)$ ist eine monogene Funktion von x. — Dieser Satz ergibt sich sofort aus dem Satz a) S. 326, wenn man wie S. 157

$$F(x) = a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_l)^{k_l}$$

setzt und bedenkt, daß

$$F(x) = la_0 + k_1 L(x-c_1) + k_2 L(x-c_2) + \cdots + k_l L(x-c_l)$$

ist.

b) „Die Potenz $\{\!\{F(x)\}\!\}^s$ ist bei beliebigem Exponenten s eine monogene Funktion von x." — Dies ergibt sich zufolge des Satzes b) S. 326 aus der Formel

$$\{\!\{F(x)\}\!\}^s = e^{sLF(x)}.$$

c) Versteht man unter $\{\!\{F(x)\}\!\}^{f(x)}$ den Ausdruck $e^{f(x)LF(x)}$, so ist er eine monogene Funktion von x, falls $f(x)$ eine solche ist.

IX. Abschnitt.

Die unendlichen Produkte.

1. Konvergenz und Divergenz der unendlichen Produkte.

Es sei $f_0, f_1, \ldots f_n, \ldots$ eine endlose Folge von beliebigen, reellen oder komplexen Zahlen. Bilden wir in der vorgeschriebenen Ordnung die Partialprodukte

$$p_0 = f_0, \quad p_1 = f_0 f_1, \cdots, \; p_n = f_0 f_1 \cdots f_n, \cdots,$$

so haben sie beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ entweder einen endlichen Grenzwert oder nicht. Im ersten Falle heißt das unendliche Produkt

$$f_0 f_1 \cdots f_n \cdots \quad \text{oder} \quad \prod_0^\infty f_n$$

konvergent, im zweiten divergent. Daß p_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert a besitzt, besagt nach Arithmetik S. 381 genau soviel wie die Tatsache, daß zu jeder positiven Zahl ε eine andere μ so gehört, daß neben

$$n > \mu \quad \text{stets} \quad |p_n - a| < \varepsilon$$

ist.

Der Fall, daß $a = 0$ ist, ist für sich zu behandeln. Zunächst erkennt man, daß, wenn eine der Zahlen f_n gleich Null ist, alle p_n von einem bestimmten Werte des Stellenzeigers n an gleich Null sind und daher auch $\lim\limits_{n=+\infty} p_n = 0$ ist. a kann aber verschwinden, ohne daß ein Faktor f_n Null ist. Dies ergibt sich schon aus dem ersten der beiden folgenden Sätze (vgl. indes auch Satz 2) in Nr. 3).

1) „Gibt es eine positive Zahl ϱ, kleiner als 1, welcher eine positive Zahl μ so entspricht, daß wenn $n > \mu$ ist, $|f_n| < \varrho$ ist, so ist

$$\lim_{n=+\infty} p_n = 0.“$$

2) „Gibt es eine positive Zahl σ, größer als 1, welcher eine positive Zahl μ so entspricht, daß, wenn $n > \mu$ ist, $|f_n| > \sigma$ ist, so ist

$$\lim_{n=+\infty} |p_n| = +\infty.“$$

Bedeutet m eine natürliche Zahl größer als μ, so hat man nämlich im ersten Falle

$$|p_n| < |p_m|\, \varrho^{n-m},$$

im zweiten

$$|p_n| > |p_m|\, \sigma^{n-m}.$$

3) „Die notwendige und, falls kein f_n Null ist, hinreichende Bedingung zur Existenz eines von Null verschiedenen, endlichen Grenzwertes a von p_n bei $\lim n = +\infty$ besteht darin, daß jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl μ so zugeordnet werden kann, daß neben

$$n > \mu \quad |f_{n+1} f_{n+2} \cdots f_{n+r} - 1| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, \cdots) \qquad \text{(a)}$$

ist, welche natürliche Zahl r auch sein mag."

Beweis. Angenommen, es sei bei

$$\lim n = +\infty \quad \lim p_n = a$$

und $A = |a| > 0$. Dann gehört zu $\varepsilon' > 0$ eine Zahl $\mu' > 0$ so, daß neben $n > \mu'$

$$|a - p_n| < \varepsilon' \quad \text{also} \quad |p_{n+r} - p_n| < 2\varepsilon' \quad (r = 1, 2, \cdots)$$

ist. Aus der ersteren Ungleichung folgt, daß, wenn $n > \mu'$ ist,

$$A - |p_n| \leqq |a - p_n| < \varepsilon' \quad \text{d. i.} \quad |p_n| > A - \varepsilon'$$

ist. Somit ergibt sich mittels der letzteren, falls $\varepsilon' < A$ ist, für

$$n > \mu' \quad \left|\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right| < \frac{2\varepsilon'}{A - \varepsilon'}.$$

Da

$$p_{n+r} : p_n = f_{n+1} f_{n+2} \cdots f_{n+r}$$

ist, so braucht man also, um die Relationen (a) zu erhalten, nur ε' so anzunehmen, daß

$$\frac{2\varepsilon'}{A - \varepsilon'} \leqq \varepsilon \text{ ist, demnach nur } \varepsilon' \leqq \frac{A\varepsilon}{2 + \varepsilon}$$

sein zu lassen. — Weiß man umgekehrt[1]), daß die Relationen (a) nebeneinander bestehen und kein f_n, also auch kein p_n Null ist, so darf man in (a) anstatt $f_{n+1} \cdots f_{n+r}$ $p_{n+r} : p_n$ setzen und kann daraus schließen, daß für $n > \mu$

$$\left|\frac{p_{n+r}}{p_n}\right| - 1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 - \left|\frac{p_{n+r}}{p_n}\right| < \varepsilon,$$

also

$$(1 - \varepsilon)\,|p_n| < |p_{n+r}| < (1 + \varepsilon)\,|p_n|$$

---

1) Einfacher ergibt sich diese Umkehrung aus dem Satze 6) in Nr. 2. Vgl. Übung 1).

ist. Setzt man hier anstatt n eine bestimmte ganze Zahl $m > \mu$, so erkennt man, daß die Zahlen $p_0, p_1, \ldots p_n \ldots$ dem absoluten Betrage nach sämtlich sowohl unter einer positiven Zahl γ (nämlich der größten der Zahlen

$$|p_0|, |p_1|, \cdots |p_{m-1}|, \quad (1+\varepsilon)|p_m|),$$

als auch über einer positiven Zahl $\varkappa$ (nämlich der kleinsten der Zahlen

$$|p_0|, |p_1|, \cdots |p_{m-1}|, (1-\varepsilon)|p_m|)$$

liegen. Nun folgt aus (a), daß für $n > \mu$

$$|p_{n+r} - p_n| < \varepsilon |p_n|$$

ist, und daraus, da $|p_n| < \gamma$ ist, daß neben

$$n > \mu, \quad |p_{n+r} - p_n| < \gamma\varepsilon \quad (r = 1, 2, \cdots)$$

ist. D. h. es existiert für p_n bei $\lim n = +\infty$ ein endlicher Grenzwert a. Und vermöge $|p_n| > \varkappa$ ist $A \geqq \varkappa$, also $A > 0$.

4) Korollar. „Zur Existenz eines endlichen, von Null verschiedenen Grenzwertes von p_n ist notwendig, daß zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\mu > 0$ so gehört, daß neben

$$n > \mu \quad \left|\frac{p_{n+1}}{p_n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{d. i.} \quad |f_{n+1} - 1| < \varepsilon,$$

somit bei $\lim n = +\infty$ $\lim f_n = 1$ ist. Setzt man

$$f_n = 1 + a_n,$$

so hat man demnach $\lim a_n = 0$ bei $\lim n = +\infty$". — Ist $\lim p_n = 0$, so gilt dieser Satz nicht immer, wie schon die Annahme $a_n = -\frac{1}{2}$ beweist.

5) Es ist bekannt (vgl. Nr. 3), daß selbst im Falle, daß bei $\lim n = +\infty$ $\lim f_n = 1$ ist, ein unendliches Produkt auch dann den Grenzwert Null haben kann, wenn keiner seiner Faktoren verschwindet. Ist aber die in den einander zugeordneten Ungleichungen (a) ausgesprochene Bedingung erfüllt, so kann ein unendliches Produkt nur in der Art verschwinden, daß ein Faktor Null ist.[1])

6) „Das unendliche Produkt $\prod_0^\infty (1 + a_n)$ und die unendliche Reihe

$$(1 + a_0) + p_0 a_1 + p_1 a_2 + \cdots + p_{n-1} a_n + \cdots$$

sind äquivalent, d. h. die Partialprodukte des ersteren stimmen der Reihe nach mit den Partialsummen der letzteren überein."

---

1) Vgl. G. Mittag-Leffler, Acta math. IV, p. 30.

In der Tat erhält man durch Addition der Gleichungen

$$p_1 = (1 + a_0)(1 + a_1) = 1 + a_0 + p_0 a_1,$$
$$p_2 = p_1 (1 + a_2) = p_1 + p_1 a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = p_{n-1}(1 + a_n) = p_{n-1} + p_{n-1} a_n$$

die Formel

$$p_n = 1 + a_0 + p_0 a_1 + p_1 a_2 + \cdots + p_{n-1} a_n. \qquad (a^*)$$

2. Allgemeine Sätze über die unendlichen Produkte.

Der Kürze wegen mögen als gleichartig bezeichnet werden unendliche Produkte, die konvergent sind, und solche, die divergent sind.

1) „Ist

$$f_n = g_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

so sind gleichartig die unendlichen Produkte

$$f_0 f_1 f_2 \cdots \quad \text{und} \quad g_0 g_1 g_2 \cdots \qquad (b)$$

Konvergiert insbesondere das erste Produkt, so auch das zweite und beide haben denselben Grenzwert." — Denn es ist

$$q_n = g_0 g_1 \cdots g_n = f_0 f_1 \cdots f_n = p_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

2) „Wenn keiner der Faktoren f_n verschwindet, so sind das unendliche Produkt $f_0 f_1 f_2 \cdots$ und jedes, das aus ihm durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Produkt c sei, hervorgeht, gleichartig."

„Konvergiert das erstere Produkt, so auch das letztere, und umgekehrt. Bedeuten a, a' ihre Grenzwerte, so ist $a = ca'$. Läßt man insbesondere die $(n + 1)$ Anfangsglieder $f_0 f_1 \cdots f_n$ weg, so erhält man das konvergente Produkt $f_{n+1} f_{n+2} \cdots$, dessen Grenzwert $Q_n = a : p_n$ ist. Wenn a von Null verschieden ist, so hat man demnach

$$\lim_{n=+\infty} Q_n = 1."$$

Setzt man

$$f_{n+1} f_{n+2} \cdots f_{n+r} = Q_{n,r},$$

so hat man

$$Q_{n,r} = p_{n+r} : p_n,$$

somit bei $\lim r = +\infty$

$$Q_n = a : p_n.$$

3) „Ein konvergentes unendliches Produkt $f_0 f_1 f_2 \cdots$ ist unbeschränkt assoziativ, d. h. leitet man aus der Folge $f_0 f_1 \cdots$ eine neue dadurch ab, daß man die Faktoren gruppenweise vereinigt, jedoch in der Weise, daß jede Gruppe nur unmittelbar aufeinander folgende Faktoren der ursprünglichen Folge enthält, und die so erhaltenen Produkte in der Ordnung, wie sie aus der Folge $f_0 f_1 \cdots$ entnommen sind, aneinanderreiht, so ist das aus der neuen Folge

hervorgehende unendliche Produkt auch konvergent und hat denselben Grenzwert, wie das gegebene.“ — Sind $F_1 F_2 \cdots F_n \cdots$ die Faktoren des neuen Produktes und ist

$$F_1 F_2 \cdots F_n = P_n,$$

so hat man

$$P_1 = p_{m_1},\ P_2 = p_{m_2}, \cdots P_n = p_{m_n},$$

also

$$\lim_{n=+\infty} P_n = \lim_{n=+\infty} p_n = a.$$

Sind die Faktoren des konvergenten Produktes $F_1 F_2 \cdots$ Produkte wie oben und man läßt die Klammern weg, so braucht das so erhaltene Produkt $f_0 f_1 f_2 \cdots$ nicht zu konvergieren. Konvergiert es aber, so hat es denselben Grenzwert wie $F_1 F_2 \cdots$.

4) „Ist k eine von Null verschiedene Konstante, so sind die Produkte

$$\prod_0^\infty f_n \quad \text{und} \quad f_0 \cdot f_1 \cdots f_{m-1} \cdot k f_m \cdot f_{m-1} \cdots f_n \cdots \qquad (m \geqq 0)$$

gleichartig. Konvergiert das erstere und zwar zum Grenzwerte a, so konvergiert das letztere zum Grenzwerte ka.“

5) „Konvergieren zwei unendliche Produkte wie (b) und zwar zu den Grenzwerten a, b, so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty f_n g_n \qquad \text{(c)}$$

und zwar zum Grenzwerte ab. Ist außerdem b von Null verschieden, so konvergiert auch das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (f_n : g_n) \qquad \text{(d)}$$

und zwar zum Grenzwerte $a : b$.“ — Denn die Partialprodukte von (c) und (d) sind bezw. $p_n \cdot q_n$, $p_n : q_n$, welche Ausdrücke bei $\lim n = +\infty$ bezw. die Grenzwerte ab, $a : b$ haben. — Die Sätze lassen sich auf jede endliche Anzahl von unendlichen Produkten ausdehnen.

6) Im Falle, daß keine der Zahlen f_n verschwindet, kann man oft von dem folgenden Satz Gebrauch machen. „Ist die aus den Hauptwerten der Logarithmen der Faktoren f_n gebildete Reihe konvergent, hat sie also einen endlichen Grenzwert s, so konvergiert auch das unendliche Produkt $\prod_0^\infty f_n$ und zwar ist

$$\prod_0^\infty f_n = \lim_{n=+\infty} p_n = e^s,$$

somit von Null verschieden. Zugleich hat man, wenn $e^s = a$ gesetzt wird,

$$la = \sum_0^\infty lf_n - 2k\pi i = s - 2k\pi i,$$

wo k eine noch zu bestimmende ganze Zahl bedeutet."[1])

Beweis. Setzt man $f_0 f_1 \cdots f_n = p_n$ und $lf_0 + lf_1 + \cdots + lf_n = s_n$, so hat man

$$lp_n = s_n - 2m_n\pi i, \qquad (\alpha)$$

wobei m_n eine im allgemeinen von n abhängige ganze Zahl bedeutet. Wenn man sich aber n groß genug denkt, so nimmt m_n einen festen Wert m an, wie sich sogleich ergeben wird. Bemerken wir zunächst, daß aus der Formel (α) die Gleichung

$$p_n = e^{s_n}$$

folgt, daß somit, wenn s_n zufolge Voraussetzung bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert s hat,

$$\lim_{n=+\infty} p_n = e^s$$

ist, d. h. daß das unendliche Produkt Πf_n konvergiert und zwar zu einem von Null verschiedenen Grenzwerte.

Daraus folgt, daß auch der Hauptwert lp_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Setzen wir nämlich $|p_n| = \mathsf{P}_n$ und

$$p_n = \mathsf{P}_n\{\cos\psi_n + i\sin\psi_n\} \qquad (-\pi < \psi_n \leqq \pi), \qquad (\beta)$$

so haben zugleich mit p_n auch P_n und ψ_n bei $\lim n = +\infty$ endliche Grenzwerte, welche bezw. mit P und ψ bezeichnet seien. Nun ist

$$lp_n = l\mathsf{P}_n + \psi_n i, \qquad (\gamma)$$

folglich

$$\lim_{n=+\infty} lp_n = l\mathsf{P} + \psi i. \qquad (\delta)$$

Es liegt nahe, diesen Grenzwert durch e^s, wofür wir a schreiben, auszudrücken. Wir haben

$$a = \lim_{n=+\infty} p_n = \mathsf{P}\{\cos\psi + i\sin\psi\}, \qquad (\varepsilon)$$

wobei wir aus den Beziehungen (β) hinsichtlich ψ nur erfahren, daß

$$-\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

ist. Ist $-\pi < \psi \leqq \pi$, so ist zufolge (ε) $la = l\mathsf{P} + \psi i$; ist aber $\psi = -\pi$, so ist $la = l\mathsf{P} + \pi i$. Entsprechend diesen beiden Fällen haben wir nach (δ)

$$\lim lp_n = la \quad \text{oder} \quad la - 2\pi i.$$

Da sowohl s_n als auch lp_n bei $\lim n = +\infty$ endliche Grenzwerte besitzen, so hat nach der Formel (α) auch die ganze Zahl m_n

1) Cauchy, Cours d'Analyse, p. 561.

einen solchen. Dies ist nur in der Art möglich, daß m_n von einem bestimmten Werte von n an einer und derselben Zahl m gleich ist.[1]) Also tritt bei hinlänglich großem n an Stelle der Formel (α) die nachstehende

$$lp_n = s_n - 2m\pi i. \qquad (\xi)$$

Hieraus erhalten wir durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ die weitere Formel

$$la \text{ (bezw. } la - 2\pi i) = s - 2m\pi i.$$

In beiden Fällen ist demnach

$$la = s - 2k\pi i,$$

worin k eine ganze Zahl vorstellt.

7) Von dem Satze 6) gilt auch die Umkehrung: „Wenn p_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert a besitzt, so konvergiert auch die unendliche Reihe $\sum_0^\infty lf_n$."

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß neben a auch die sämtlichen Faktoren f_n von Null verschieden sind, so daß

$$s_n = \sum_0^n lf_r \qquad (\eta)$$

für jeden Wert $n = 0, 1, 2, \cdots$ einen Sinn hat. Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen gelten ferner die Gleichungen (α) bis (ε). Setzen wir nun

$$f_n = \varrho_n(\cos\vartheta_n + i\sin\vartheta_n) \quad (-\pi < \vartheta_n \leqq \pi), \qquad (\vartheta)$$

so ist nach dem Satze 4) in Nr. 1

$$\lim_{n=+\infty} f_n = 1, \quad \text{also} \quad \lim_{n=+\infty} \varrho_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n=+\infty} \vartheta_n = 0.$$

Aus (α), (η) und (ϑ) ergibt sich

$$lp_n = \sum_0^n (l\varrho_r + \vartheta_r i) - 2m_n\pi i$$

---

1) Hat m_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert, so muß der Zahl 1 ein $\mu > 0$ so entsprechen, daß neben $n > \mu$

$$|m_{n+r} - m_n| < 1 \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

ist. Da die m_n ganze Zahlen sind, so folgt daraus notwendig; daß

$$m_{n+r} = m_n \qquad (n > \mu;\ r = 1, 2, \cdots)$$

ist.

und hieraus mit Hilfe von (γ)

$$\psi_n = \sum_0^n \vartheta_r - 2m_n\pi .$$

Demnach ist

$$2(m_n - m_{n+1})\,\pi = (\psi_{n+1} - \psi_n) - \vartheta_{n+1};$$

da aber $\lim\limits_{n=+\infty} \psi_n = \psi$ und $\lim\limits_{n=+\infty} \vartheta_{n+1} = 0$ ist, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine andere $\mu > 0$ so, daß neben $n > \mu$

$$|\psi_{n+1} - \psi_n| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\vartheta_{n+1}| < \varepsilon ,$$

also

$$\pi\,|m_n - m_{n+1}| < \varepsilon$$

ist. Nimmt man hier $\varepsilon = \pi$, so hat man

$$|m_n - m_{n+1}| < 1$$

und daraus folgt, da m_n und m_{n+1} ganze Zahlen sind, $m_{n+1} = m_n$, d. h. m_n hat für alle $n > \mu$ den nämlichen Wert m, so daß für $n > \mu$ wieder die Gleichung (ξ) besteht. Somit ist

$$\lim s_n = la + 2m\pi i \;[\text{bezw. } la + 2(m-1)\pi i].$$

Hinsichtlich des Falles, daß die unendliche Reihe Σlf_n divergiert, sei folgendes bemerkt. Wir bezeichnen mit σ_n, τ_n die Koordinaten der komplexen Zahl s_n, so daß

$$s_n = \sigma_n + \tau_n i, \quad p_n = e^{s_n} = e^{\sigma_n} \cdot e^{\tau_n i}$$

ist. Wenn alsdann σ_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $-\infty$ hat, so hat p_n dabei den Grenzwert Null. Ist aber $\lim \sigma_n = +\infty$, so ist jedenfalls

$$\lim_{n=+\infty} |p_n| = +\infty .$$

3. Unendliche Produkte aus reellen Faktoren.

Wir wollen nun untersuchen, in wieweit die übrigen für die Produkte aus einer endlichen Anzahl von Faktoren geltenden Regeln sich auf die Grenzwerte von konvergenten unendlichen Produkten ausdehnen lassen. Dabei setzen wir

$$f_n = 1 + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

und beschränken uns auf die Annahme, daß a_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null habe. Diese Annahme genügt, da sie im Falle, daß das Produkt einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert hat, immer zutrifft. In der vorliegenden Nummer setzen wir überdies noch die $a_n = \alpha_n$ als reell und von -1 verschieden voraus. Die unendlichen Produkte aus reellen Faktoren lassen sich, indem wir zunächst die Frage nach der Vertauschbarkeit der Faktoren

ins Auge fassen, völlig analog wie die unendlichen Reihen mit reellen Gliedern (vgl. Arithmetik, Abschnitt IX, Nr. 5 und 9) erledigen.[1])

Wir gehen hierbei von den beiden folgenden in „Arithmetik" S. 255 bewiesenen Sätzen 1) und 2) aus, worin die α_n sämtlich als positiv zu betrachten sind.

1) „Das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (1 + \alpha_n)$$

konvergiert und zwar zu einem positiven Grenzwerte größer als 1, wenn die unendliche Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \cdots \tag{1}$$

konvergiert; es divergiert und hat den Grenzwert $+\infty$, wenn die Reihe (1) divergiert."

2) „Sind die Zahlen α_n sämtlich kleiner als 1, so hat das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (1 - \alpha_n)$$

stets einen endlichen Grenzwert und zwar ist er positiv und kleiner als 1, wenn die Reihe (1) konvergiert, dagegen Null, wenn sie divergiert."

Mit Hilfe dieser beiden Sätze findet man:

3) „Wenn die Reihe (1) konvergiert und $\varepsilon = +1$ oder -1 ist, so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (1 + \varepsilon\alpha_n)$$

bei jeder Anordnung seiner Faktoren zu dem nämlichen von Null verschiedenen Grenzwerte."

Setzt man nämlich

$$p_n = \prod_0^n (1 + \varepsilon\alpha_r) \quad \text{und} \quad p'_n = \prod_0^n (1 + \varepsilon\alpha'_r),$$

wobei $\alpha'_0, \alpha'_1, \cdots$ die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ in irgend einer Anordnung bedeuten, so hat sowohl p_n als auch p'_n bei $\lim n = +\infty$ zufolge 1) bezw. 2) einen von Null verschiedenen, endlichen Grenzwert a bezw. a' und es sind bei jedem Werte von n

1) In anderer, ebenfalls elementarer Weise hat A. Pringsheim [Math. Annalen 33 (1889), S. 119] sowohl die reellen als auch die komplexen unendlichen Produkte behandelt. — Bezüglich der unendlichen Produkte aus reellen Faktoren vgl. auch E. Bortolotti, Rendiconti die Palermo 18 (1904), p. 1.

$$r_n = \prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + \varepsilon\alpha_r) \quad \text{und} \quad r'_n = \prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + \varepsilon\alpha'_r)$$

bestimmte Zahlen, wofür

$$\lim_{n=+\infty} r_n = \lim_{n=+\infty} r'_n = 1 \tag{2}$$

ist. Bei hinlänglich großem n haben die beiden Produkte p_n und p'_n jedenfalls einige Faktoren gemeinsam, deren Produkt wir mit φ_n bezeichnen wollen. Schreibt man dann

$$p_n = \varphi_n \varrho'_n, \quad p'_n = \varphi_n \varrho_n, \tag{3}$$

so enthält ϱ'_n nur solche Faktoren $1 + \varepsilon\alpha_r$, welche in r'_n, und ϱ_n nur solche, welche in r_n vorkommen, und es ist daher offenbar

$$1 \lesseqgtr \varrho_n \lesseqgtr r_n, \quad 1 \lesseqgtr \varrho'_n \lesseqgtr r'_n,$$

worin die oberen oder unteren Ungleichheitszeichen zu gelten haben, je nachdem $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist. Somit folgt aus (2)

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n = \lim_{n=+\infty} \varrho'_n = 1$$

und hierauf aus (3)

$$\lim_{n=+\infty} \frac{p'_n}{p_n} = \lim_{n=+\infty} \frac{\varrho_n}{\varrho'_n} = 1, \quad \text{d. i.} \quad a' = a.$$

4) „Bedeuten nunmehr die α_n beliebige reelle, jedoch von -1 verschiedene Zahlen, so konvergiert das unendliche Produkt $\Pi(1+\alpha_n)$ bei jeder Anordnung seiner Faktoren zu dem nämlichen von Null verschiedenen Grenzwerte, wenn die unendliche Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \cdots \tag{4}$$

absolut konvergiert."

Beweis. Zufolge des vorstehenden Satzes 3) und des Satzes 2) in Nr. 2 dürfen wir annehmen, daß in der Reihe (4) sowohl positive als auch negative Glieder in unbegrenzter Anzahl vorkommen. Die Reihe der erstereren sei

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n + \cdots, \tag{5}$$

die aus den absoluten Beträgen der letzteren gebildete Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_n + \cdots. \tag{6}$$

Ferner sei

$$p_n = \prod_{0}^{n}{}_r (1 + \alpha_r) = \psi_n \cdot \chi_n, \tag{7}$$

$$\psi_n = \prod_{0}^{\mu_n}{}_r (1 + \beta_r), \quad \chi_n = \prod_{0}^{\nu_n}{}_r (1 - \gamma_r), \tag{8}$$

worin μ_n und ν_n mit n zugleich unendlich werden. Wenn nun die

Reihe 4 absolut konvergiert, so konvergieren ebenso die Reihen 5) und 6) und es haben v_n und χ_n bei $\lim n = -\infty$ je einen von Null verschiedenen, endlichen Grenzwert b, bezw. c, welcher von der Anordnung der Faktoren unabhängig ist. Demnach ergibt sich aus 7)

$$\lim_{n=-\infty} p_n = b \cdot c$$

und zwar bei jeder Anordnung der Faktoren.

5) Falls die Reihe 4) nicht absolut konvergiert, muß mindestens die eine der beiden Reihen 5) und 6) divergieren und es gilt das Folgende:

a) „Wenn die Reihe 5) konvergiert, dagegen 6) divergiert, so ist bei jeder Anordnung der Faktoren $\lim p_n = 0$." — Denn es ist $\lim v_n$ eine endliche Zahl, während $\lim \chi_n = 0$ ist.

b) „Wenn die Reihe 5) divergiert, hingegen 6) konvergiert, so hat p_n bei jeder Anordnung der Faktoren den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem in der Reihe 6) eine gerade oder ungerade Anzahl m von solchen Gliedern, die größer als 1 sind, vorkommt." — Denn es ist jetzt $\lim v_n = +\infty$, während $\lim \chi_n$ eine endliche, positive oder negative Zahl ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist.

c) „Wenn beide Reihen 5) und 6) zugleich divergieren, kann man die Faktoren des unendlichen Produktes $\Pi(1 + \alpha_n)$ stets in eine solche Anordnung bringen, daß p_n bei $\lim n = +\infty$ einem beliebig vorgelegten, nicht negativen, bezw. nicht positiven Grenzwerte, welcher auch Null oder ∞ sein kann, zustrebt oder zwischen zwei solchen Zahlen oszilliert." — Der Beweis hierfür, bei welchem man sich auf den Fall, daß die sämtlichen γ_n kleiner als 1 sind, beschränken darf, kann in analoger Weise wie bei dem entsprechenden Satze über unendliche Reihen in „Arithmetik" S. 249[1]) geführt werden. Die Ausführung desselben möge der Kürze wegen unterbleiben. Dagegen sei hier noch bemerkt, daß sich die Sätze 3), 4) und 5, a, b, c) mittels der obigen Sätze 1) und 2) und der Sätze 6) und 7) der vorigen Nr. unmittelbar auf den Satz von der Kommutativität der Reihen aus positiven Gliedern (Arithmetik, S. 238) und auf die Sätze über die Reihen aus positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl (Arithmetik IX, 9) zurückführen lassen, indem neben

$$p_n = \prod_0^n (1 + \alpha_r) \quad \text{und} \quad s_n = \sum_0^n l(1 + \alpha_r)$$

$$p_n = e^{s_n} \tag{9}$$

ist. Auf Grund dieser Bemerkung, kann der Beweis des Satzes 5, c) in folgender Weise erbracht werden, wobei wir zur Vereinfachung alle γ_n kleiner als 1 annehmen wollen. Wir setzen

1) Man vgl. auch die Fußnote a. a. O. S. 248.

$$\sigma_n = \sum_0^{\mu_n}{}_r\, l(1+\beta_r), \quad \tau_n = \sum_0^{\nu_n}{}_r\, l(1-\gamma_r)$$

und es ist dann nach dem Satze 1) mit Rücksicht auf (8)

$$\lim_{n=+\infty} e^{\sigma_n} = \lim_{n=+\infty} \psi_n = +\infty, \quad \text{also} \quad \lim_{n=+\infty} \sigma_n = +\infty$$

und nach dem Satze 2)

$$\lim_{n=+\infty} e^{\tau_n} = \lim_{n=+\infty} \chi_n = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n=+\infty} \tau_n = -\infty.$$

Demnach divergieren die beiden unendlichen Reihen $\Sigma l(1+\beta_n)$, $\Sigma l(1-\gamma_n)$, von denen die erste lauter positive, die zweite lauter negative Glieder enthält, so daß nach „Arithmetik" S. 249 die unendliche Reihe $\Sigma l(1+\alpha_n)$ bei entsprechender Anordnung ihrer Glieder jeden beliebig gegebenen reellen Grenzwert oder auch voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen haben kann. Daraus folgt aber im Hinblicke auf die Gleichung (9) unmittelbar die Richtigkeit der in 5, c) bezüglich des Produktes $\Pi(1+\alpha_n)$ aufgestellten Behauptung.

4. Unbedingte Konvergenz unendlicher Produkte.

Das unendliche Produkt

$$\prod_0^{\infty}{}_n (1+a_n), \tag{1}$$

worin die a_n beliebige reelle oder komplexe, jedoch von -1 verschiedene Zahlen vorstellen, heißt unbedingt konvergent, wenn daselbe bei jeder Anordnung der Faktoren $1+a_n$ je einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert besitzt. Demnach ist, falls die a_n sämtlich reell sind, das Produkt (1) zufolge der Sätze 4) und 5) der vorigen Nr. dann und nur dann unbedingt konvergent, wenn die unendliche Reihe Σa_n absolut konvergiert und es hat dann, wie wir bereits wissen, bei jeder Anordnung seiner Faktoren den nämlichen Grenzwert. Genau dasselbe gilt aber, wie wir jetzt zeigen wollen, auch bei komplexen a_n. Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst den folgenden Satz:

1. Satz. „Es sei in der trigonometrischen Form

$$1+a_n = \varrho_n(\cos\vartheta_n + i\sin\vartheta_n) \quad (-\pi < \vartheta_n \leqq \pi;\ \varrho_n > 0;\ n = 0, 1, \cdots). \tag{2}$$

Hat dann $\prod_0^n{}_r\, \varrho_r$ bei $\lim = +\infty$ einen endlichen Grenzwert ϱ und konvergiert die unendliche Reihe

$$\vartheta_0 + \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_n + \cdots \tag{3}$$

und zwar zum Grenzwerte ϑ, so konvergiert das Produkt

$$p_n = \prod_{0}^{n}{}_r (1 + a_r) \tag{4}$$

bei $\lim n = +\infty$ zum Grenzwerte $a = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$.

Weiß man umgekehrt, daß $\lim\limits_{x=+\infty} a_n = 0$ ist und daß p_n bei $\lim n = +\infty$ zu einem endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerte

$$a = \varrho(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta') \quad (-\pi < \vartheta' \leqq \pi) \tag{5}$$

konvergiert, so hat $\prod\limits_{0}^{n}{}_r \varrho_r$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert ϱ und die unendliche Reihe (3) konvergiert zu einem Grenzwerte $\vartheta = \vartheta' + 2g\pi$, worin g eine bestimmte ganze Zahl bedeutet."

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus der Formel

$$p_n = \prod_{0}^{n}{}_r \varrho_r(\cos\vartheta_r + i\sin\vartheta_r) = \prod_{0}^{n}{}_r \varrho_r \left\{\cos\sum_{0}^{n}{}_r \vartheta_r + i\sin\sum_{0}^{n}{}_r \vartheta_r\right\}. \tag{6}$$

Um den zweiten Teil zu zeigen, setzen wir

$$p_n = \sigma_n(\cos\tau_n + i\sin\tau_n) \quad (-\pi < \tau_n \leqq \pi;\ \sigma_n > 0), \tag{7}$$

so daß nach (6)

$$\sigma_n = \prod_{0}^{n}{}_r \varrho_r, \qquad \tau_n = \sum_{0}^{n}{}_r \vartheta_r - 2m_n\pi \tag{8}$$

ist, wobei m_n eine ganze Zahl vorstellt. Da $\lim\limits_{n=+\infty} p_n = a$ ist, so ergibt sich aus (5) und (7)

$$\lim_{n=+\infty} \sigma_n = \lim_{n=+\infty} \prod_{0}^{n}{}_r \varrho_r = \varrho$$

und, indem wir noch den Grenzwert von τ_n bei $\lim n = +\infty$ mit τ bezeichnen,

$$\tau = \lim_{n=+\infty} \tau_n = \vartheta' \quad \text{oder} \quad \vartheta' - 2\pi, \tag{9}$$

und zwar ist stets $\tau = \vartheta'$, falls $-\pi < \vartheta' < \pi$ ist; dagegen kann möglicherweise $\tau = \vartheta' - 2\pi$ sein, falls $\vartheta' = \pi$ ist. Ferner findet man mittels der zweiten Gleichung (8)

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \vartheta_{n+1} - 2(m_{n+1} - m_n)\pi. \tag{10}$$

Nun ist aber wegen $\lim a_n = 0$ zufolge (2)

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n=+\infty} \vartheta_n = 0;$$

somit gibt es zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n_0 derart, daß neben $n \geqq n_0$ $|\vartheta_n| < \varepsilon$ und gemäß (9) auch

$|\tau_{n+1} - \tau_n| < \varepsilon$ ist. Nimmt man hier $\varepsilon = \pi$, so erhält man aus (10) die Beziehung

$$|m_{n+1} - m_n| < 1 \qquad (n \geqq n_0),$$

welche, da m_n und m_{n+1} ganze Zahlen sind, besagt, daß $m_{n+1} = m_n$ ist. Es ist also m_n von einer bestimmten Stelle $n = n_0$ an eine konstante Zahl m. Demnach ergibt sich aus der zweiten Gleichung (8) im Hinblicke auf (9)

$$\lim_{n=+\infty} \sum_0^n \vartheta_r = \tau + 2m\pi = \vartheta' + 2m\pi \quad \text{oder} \quad \vartheta' + 2(m-1)\pi.$$

In beiden Fällen hat dieser Grenzwert die Gestalt $\vartheta' + 2g\pi$, worin g eine ganze Zahl ist.

Mittels dieses Satzes gewinnt man nun leicht den oben bereits angekündigten Hauptsatz über die unbedingt konvergenten Produkte:

2. Satz.[1]) „Zur unbedingten Konvergenz des unendlichen Produktes (1) ist erforderlich und hinreichend die absolute Konvergenz der unendlichen Reihe Σa_n. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat das Produkt (1) bei jeder Anordnung seiner Faktoren den nämlichen von Null verschiedenen Grenzwert."

Beweis. Gemäß des ersten Satzes ist zur unbedingten Konvergenz des Produktes (1) notwendig und hinreichend, daß sowohl das Produkt

$$\prod_0^\infty \varrho_n \tag{11}$$

als auch die Reihe

$$\sum_0^\infty \vartheta_n \tag{12}$$

unbedingt konvergiere. Da in diesem Falle die Reihe (12) und nach Nr. 2 auch das Produkt (11) kommutativ ist, so gilt wegen (6) das Nämliche von dem Produkte (1). Setzen wir nun

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i, \tag{13}$$

so ist zufolge (2)

$$\varrho_n \cos \vartheta_n = 1 + \alpha_n, \quad \varrho_n \sin \vartheta_n = \beta_n, \tag{14}$$

somit

$$\varrho_n^2 = 1 + 2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2. \tag{15}$$

Da die ϱ_n sämtlich positiv sind, so zieht die Konvergenz von (11) jene des Produktes $\prod_0^\infty \varrho_n^2$ nach sich und umgekehrt; denn es ist offenbar

---

1) U. Dini, Annali di Mat., ser. 2, t. 2, p. 35.

$$\prod_0^\infty{}_n \varrho_n^2 = \left\{\prod_0^\infty{}_n \varrho_n\right\}^2, \qquad \prod_0^\infty{}_n \varrho_n = \sqrt{\prod_0^\infty{}_n \varrho_n^2}.$$

Demnach fällt die oben an (11) geknüpfte Bedingung mit der Forderung zusammen, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n |2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2| \tag{16}$$

konvergiere. Trifft das letztere zu, so ist bekanntlich

$$\lim_{n=+\infty} (2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2) = 0$$

und daher zufolge (15)

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n^2 = 1, \quad \text{also auch} \quad \lim_{n=+\infty} \varrho_n = 1. \tag{17}$$

Aus der unbedingten Konvergenz von (12) folgt ferner die Konvergenz der unendlichen Reihe $\Sigma|\vartheta_n|$ und aus dieser wegen $|\vartheta_n| \geqq |\sin\vartheta_n|$ im Hinblick auf (17) jene von $\Sigma\varrho_n|\sin\vartheta_n|$, d. i. gemäß der zweiten Formel (14) $\Sigma|\beta_n|$, wonach auch $\Sigma\beta_n^2$ konvergent sein muß. Hieraus und aus der Konvergenz der Reihe (16) ergibt sich aber die Konvergenz von

$$\sum_0^\infty{}_n |2\alpha_n + \alpha_n^2| = \sum_0^\infty{}_n |\alpha_n| \cdot |2 + \alpha_n|. \tag{18}$$

Nun ist wegen der Konvergenz von (12) $\lim \vartheta_n = 0$ und daher nach der ersten Formel (14) mit Rücksicht auf (17) $\lim \alpha_n = 0$. Somit konvergiert neben (18) auch die Reihe $\Sigma|\alpha_n|$, und weil $|a_n| \leqq |\alpha_n| + |\beta_n|$ ist, so muß auch $\Sigma|a_n|$ konvergieren. Es ist also die unbedingte oder absolute Konvergenz der Reihe Σa_n eine notwendige Bedingung für die unbedingte Konvergenz des Produktes (1).

Angenommen nun, die genannte Bedingung sei erfüllt, dann konvergieren zufolge (13) die beiden Reihen $\Sigma|\alpha_n|$ und $\Sigma|\beta_n|$ und neben der letzteren auch die Reihe $\Sigma\beta_n^2$. Hieraus folgt aber die Konvergenz der Reihe (18) und, weil

$$|2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2| \leqq |2\alpha_n + \alpha_n^2| + \beta_n^2$$

ist, auch jene der Reihe (16), also die unbedingte Konvergenz des Produktes (11). Ferner hat man wieder

$$\lim_{n=+\infty} \varrho_n = 1, \quad \lim_{n=+\infty} \alpha_n = \lim_{n=+\infty} \beta_n = 0. \tag{19}$$

Demnach konvergiert neben $\Sigma|\beta_n|$ auch die Reihe $\sum\left|\frac{\beta_n}{1+\alpha_n}\right|$, d. i. $\Sigma|\operatorname{tang}\vartheta_n|$ und daher ebenso die Reihe $\Sigma|\vartheta_n|$; denn zufolge (14) und (19) ist $\lim \vartheta_n = 0$, also bei hinlänglich großen Werten von n

$|\vartheta_n| < \frac{\pi}{2}$ und aus diesem Grunde

$$|\vartheta_n| < |\tan \vartheta_n|.$$

Somit ist die in Rede stehende Bedingung auch hinreichend.

Zusätze. 1) „Wenn von den beiden unendlichen Reihen

$$\sum_0^\infty a_n \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty l(1 + a_n)$$

die eine absolut konvergiert, so konvergiert auch die andere absolut. Hierbei ist selbstverständlich wieder vorausgesetzt, daß keines der a_n den Wert -1 habe. Die zweite Reihe hat im Falle der Konvergenz den Grenzwert

$$la + 2k\pi i,$$

worin a den Grenzwert des unendlichen Produktes $\Pi(1 + a_n)$ und k eine ganze Zahl bedeutet." — Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorstehenden 2. Satze und aus den Sätzen 6) und 7) in Nr. 2.

2) Läßt man die am Eingange dieser Nr. gemachte Beschränkung, daß keines der a_n den Wert -1 haben solle, fallen, so folgt aus dem obigen 2. Satze, daß das aus den Faktoren

$$1 + a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

gebildete unendliche Produkt im Falle, daß die Reihe Σa_n absolut konvergiert, dann und nur dann verschwindet, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Zufolge dieses Umstandes läßt der bisher gegebene Begriff der unbedingten Konvergenz unendlicher Produkte eine Erweiterung zu. Wir bezeichnen von jetzt an als unbedingt konvergent alle jene unendlichen Produkte $\Pi(1 + a_n)$ — aber auch nur diese —, bei denen die unendliche Reihe Σa_n absolut konvergiert, gleichviel ob ein solches Produkt verschwindende Faktoren (welche unter der genannten Bedingung höchstens in endlicher Anzahl vorkommen können) enthält oder nicht. Dagegen betrachten wir jedes dieser Bedingung nicht entsprechende konvergente unendliche Produkt als bedingt konvergent.

Den unbedingt konvergenten unendlichen Produkten allein kommt die Eigenschaft zu, daß neben $\Pi(1 + a_n)$ auch $\Pi(1 + |a_n|)$ konvergiert. Aus diesem Grunde bezeichnet man sie auch als absolut konvergent.[1])

Ein unendliches Produkt, welches bei jeder Anordnung seiner Faktoren divergiert, heißt unbedingt divergent.

---

1) Vgl. Pringsheim a. a. O. S. 134.

5. Weitere Eigenschaften der unbedingt konvergenten unendlichen Produkte.

Für die unbedingt konvergenten Produkte gelten noch die folgenden Sätze, Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen über die Produkte aus einer endlichen Anzahl von Faktoren.[1]) Nur solche unendliche Produkte verhalten sich demnach in jeder Hinsicht so, wie es der Name „Produkt" verlangt.

1) Bildet man aus den Faktoren des unbedingt konvergenten Produktes

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1 + a_n), \tag{1}$$

ohne einen zu übergehen, eine endliche oder unendliche Anzahl von Partialprodukten

$$\prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1 + a_n^{(m)}) \qquad (m = 0, 1, \cdots), \tag{2}$$

(wo $a_n^{(m)}$ auch für alle Werte von n von einem bestimmten an Null sein kann), so konvergiert ein jedes unendliche unter ihnen unbedingt. Das aus den endlichen Produkten und den Grenzwerten der unendlichen Produkte in (2)

$$1 + a^{(0)}, \quad 1 + a^{(1)}, \ldots \quad 1 + a^{(m)}, \ldots$$

gebildete Produkt $\prod_{0}^{\infty}{}_{m}(1 + a^{(m)})$ konvergiert unbedingt und zwar zu demselben Grenzwerte, wie das vorgelegte Produkt (1)."

Der Satz ergibt sich, falls unter den Faktoren $1 + a_n$ keine verschwindenden vorkommen, unmittelbar durch Anwendung des 6. Satzes in „Arithmetik" S. 251, 389 auf die unendliche Reihe $\Sigma l(1 + a_n)$.

Wenn dagegen von den Faktoren $1 + a_n$ einer oder einige verschwinden, so ist zunächst unmittelbar klar, daß wieder alle Teilprodukte (2) unbedingt konvergieren, und der soeben genannte Satz zeigt dann, daß das aus denjenigen Teilprodukten (2), welche nicht verschwinden, bezw. aus deren Grenzwerten gebildete Produkt ebenfalls unbedingt konvergiert. Diese Eigenschaft behält das letztere Produkt aber auch dann noch bei, wenn man in dasselbe so viele Nullen als Faktoren in beliebiger Anordnung einschaltet, als unter den Teilprodukten (2) verschwindende sich vorfinden; nur wird dabei sein Grenzwert Null werden, also wieder mit jenem des Produktes (1) zusammenfallen.

---

1) Nach Weierstraß (vgl. Pincherle, saggio etc. in Battaglini G. XVIII, p. 231).

2) Das distributive Gesetz. Bildet man eine unendliche Reihe aus 1, den Gliedern

$$a_0, a_1, \cdots a_n \cdots,$$

ihren Produkten zu je zweien, zu dreien, $\cdots$ (z. B. dadurch, daß man die Produkte $a_n \cdot a_p \cdot a_q \cdots$ so aneinander reiht, daß die Summe der Indices $n+p+q+\cdots$ nicht abnimmt), so ist sie im Falle, daß Σa_n absolut konvergiert, ebenfalls absolut konvergent und hat zur Summe den Grenzwert a des unbedingt konvergenten Produktes (1). Man hat daher, wenn man unter $\Sigma a_n a_p$ die Summe aller Produkte von je zweien unter den Zahlen $a_0, a_1, \cdots$, unter $\Sigma a_n a_p a_q$ die Summe aller Produkte von je dreien unter ihnen usw. versteht, die Gleichung

$$\prod_0^\infty{}_n(1+a_n) = 1 + \Sigma a_n + \Sigma a_n a_p + \Sigma a_n a_p a_q + \cdots \tag{3}$$

Wir fügen hinzu: „Ist außerdem $|a_n| < 1$, so hat man zufolge der Formeln

$$l(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^3}{3} - \cdots \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

$$\sum_0^\infty{}_n\, l(1+a_n) = \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_0^\infty{}_n\, a_n^m = la + 2k\pi i, \tag{5}$$

wobei k eine bestimmte ganze Zahl bedeutet."

Beweis. Setzt man

$$(1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n) = p_n \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

so ist nach dem 6. Satze in Nr. 1 neben dem unendlichen Produkte (1) auch die Reihe

$$1 + a_0 + p_0 a_1 + \cdots + p_{n-1} a_n + \cdots \tag{6}$$

konvergent und zwar hat sie den nämlichen Grenzwert a wie dasselbe.

Löst man die Glieder der Reihe (6) auf, setzt also

$$\begin{aligned} p_0 a_1 &= a_1 + a_0 a_1, \\ p_1 a_2 &= a_2 + a_0 a_2 + a_1 a_2 + a_0 a_1 a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

so erhält man im Falle der absoluten Konvergenz von Σa_n eine absolut konvergente Reihe. Ersetzt man nämlich in den Gliedern der Reihe

$$1 + a_0 + a_1 + a_0 a_1 + a_2 + a_0 a_2 + a_1 a_2 + a_0 a_1 a_2 + \cdots \tag{7}$$

die a_n durch ihre absoluten Beträge A_n, so ist die Summe von beliebig vielen der so entstandenen Glieder nicht größer als

$$(1+A_0)(1+A_1)\cdots(1+A_h),$$

wo h den größten Index bedeutet, der in dieser Summe überhaupt vorkommt, folglich kleiner als die positive Zahl

$$B = \prod_{0}^{\infty}{}_{n}(1 + A_n). \tag{8}$$

Somit konvergiert die Reihe der absoluten Beträge der Glieder in der Reihe (7). Demnach wird, wie die Glieder der Reihe (7) auch geordnet werden mögen, die Summe der neuen Reihe stets a sein. Wir dürfen die Glieder von (7) auch, wie es auf der rechten Seite der Formel (3) geschehen ist, in eine unendliche Doppelreihe ordnen (Arithmetik S. 251, 389 Satz 6)).

Ersetzt man ferner die Glieder der unendlichen Reihen in den Gleichungen (4) durch ihre absoluten Beträge, so erhält man

$$(n = 0, 1, \cdots) \quad A_n + \tfrac{1}{2}A_n^2 + \tfrac{1}{3}A_n^3 + \cdots = -l(1 + A_n).$$

Es ist aber die Reihe $\Sigma l(1 + A_n)$ konvergent, da das unendliche Produkt (8) konvergiert. Das Schema (4) erfüllt demnach die Cauchysche Bedingung („Arithmetik" S. 254, 390), läßt sich also nach Vertikalreihen ordnen, so daß die Gleichung (5) besteht. Bezüglich des dritten Teiles derselben vgl. Satz 6) S. 404.

6. Unendliche Produkte, deren Faktoren von einer Veränderlichen abhängen.

1)[1]) „Es seien $g_0(x), g_1(x), \cdots g_n(x), \cdots$, endliche oder unendliche Reihen nach ganzen positiven Potenzen von x ohne konstantes Glied, also

$$g_n(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{m} a_{n,m} x^m,$$

und es seien die unendlichen unter ihnen konvergent für alle Werte von x, deren absoluter Betrag unter der positiven, von n unabhängigen Zahl R liegt.

Ferner sei

$$|x| = X, \quad |a_{n,m}| = A_{n,m}, \quad \sum_{1}^{\infty}{}_{m} A_{n,m} X^m = G_n(X).$$

Konvergiert dann für $X < R$ die unendliche Reihe

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} G_n(X), \tag{A}$$

so konvergiert das Produkt

1) Weierstraß in seinen Vorlesungen; vgl. auch Werke II, S. 95.

$$\prod_0^\infty{}_n (1 + g_n(x)) \tag{B}$$

für alle Werte von x, deren Betrag kleiner als R ist, unbedingt — sein Grenzwert sei $f(x)$ — und es läßt sich nach Potenzen von x entwickeln, d. h. bildet man die unendliche Reihe aus den Gliedern

$$a_{n_1, m_1} a_{n_2, m_2} \cdots a_{n_r, m_r},$$

worin die zweiten Indizes $m_1, \cdots m_r$ alle ganzzahligen Werte von 1 bis m erhalten, deren Summe m ist, während die ersten Indizes $n_1, \cdots n_r$ unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte von Null an annehmen, ohne daß jedoch zwei einander gleich werden dürfen, so konvergiert sie absolut. Ist c_m ihre Summe, so konvergiert für alle Werte von x:

$$|x| < R$$

die Potenzreihe

$$1 + \sum_1^\infty{}_m c_m x^m$$

absolut und ihre Summe ist $f(x)$."

Zusatz. „Zu jedem Werte $X < R$ gehört eine solche ganze Zahl $m(X)$, daß für $n \geqq m(X)$ $G_n(X) < 1$ ist, mithin

$$l(1 + g_n(x)) = g_n(x) - \tfrac{1}{2} g_n(x)^2 + \cdots \quad (n \geqq m(X)) \tag{C}$$

gesetzt werden darf. Die unendliche Reihe

$$\sum_{m(X)}^\infty{}_n (g_n(x) - \tfrac{1}{2} g_n(x)^2 + \cdots) \tag{D}$$

darf nach Potenzen von x geordnet werden."

Beweis. Da

$$|g_n(x)| \leqq G_n(X) \quad (n = 0, 1, \cdots) \tag{E}$$

ist, so konvergiert das Produkt (B) unbedingt, wenn nur $|x| < R$ ist (Nr. 4).

Wir dürfen daher nach der Formel (3) S. 417 setzen:

$$\prod_0^\infty{}_n (1 + g_n(x)) = 1 + \sum_0^\infty{}_n g_n(x) + \sum_{n,p} g_n(x) g_p(x) + \sum_{n,p,q} g_n(x) g_p(x) g_q(x) + \cdots, \tag{F}$$

wo sich das zweite Σ auf alle Amben, das dritte auf alle Ternen, $\cdots$ der unbegrenzten Folge 0, 1, 2, $\cdots$ bezieht. Jedes der in ihnen vor-

kommenden Produkte läßt sich für die genannten x in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln („Arithmetik" S. 389 Satz 7)). Eine jede von diesen Summen darf man nach dem Cauchyschen Doppelreihensatze (a. a. O. S. 254, 390) in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln, falls $|x| < R$ ist. Ersetzt man nämlich in den Potenzreihen $g_n(x)$ alle Glieder durch die absoluten Beträge, so erhält man die Reihen $G_n(X)$. Da nun die Reihe (A) konvergent sein soll, so kann man $\Sigma g_n(x)$ in eine ganze Potenzreihe von x verwandeln. Ersetzt man ferner in den Potenzreihen, die man für die Produkte $g_n(x)g_p(x)$ erhält, alle Glieder durch ihre absoluten Beträge, so gelangt man zu einer Reihe, deren Summe $G_n(X)G_p(X)$ nicht übersteigt. $\sum_{n,p} G_n(X)G_p(X)$ konvergiert aber, da ihre Glieder der Reihe, die sich durch Multiplikation von $\Sigma G_n(X)$ mit sich selbst ergibt, angehören usw. Aus der Konvergenz der Reihe (A) für alle $X < R$ ergibt sich, wie in der vorigen Nr. bemerkt ist, die der unendlichen Reihe

$$1 + \sum_0^\infty G_n(X) + \sum_{n,p} G_n(X)\,G_p(X) + \sum_{n,p,q} G_n(X)\,G_p(X)\,G_q(X) + \cdots$$

für die genannten Werte von X. Da jede von diesen Summen nicht kleiner ist als die Summe der Reihe, welche aus den absoluten Beträgen der einzelnen Glieder der ihr in (F) entsprechenden Summe besteht, so genügt auch die rechte Seite von (F) der Cauchyschen Bedingung und kann somit, falls $|x| < R$ ist, in eine ganze Potenzreihe von x verwandelt werden.

Bedeutet X einen gegebenen Wert, kleiner als R, so konvergiert nach Voraussetzung die Reihe (A), somit läßt sich eine Zahl $m(X)$ so angeben, daß für $n \geqq m(X)$ $G_n(X) < 1$ ist. Zufolge der Beziehung (E) besteht daher die Formel (C). Die unendliche Reihe (D) entspricht nun der Cauchyschen Bedingung. Ersetzt man nämlich in ihrem allgemeinen Gliede alle Glieder durch ihre absoluten Beträge, so erhält man eine Reihe, deren Summe die der Reihe

$$G_n(X) + \tfrac{1}{2}G_n(X)^2 + \cdots \quad \text{d. i.} \quad -l(1 - G_n(X))$$

nicht übersteigt. Die Reihe $-\Sigma l(1 - G_n(X))$ konvergiert aber nach Nr. 4. Somit darf die Reihe (D) nach Potenzen von x geordnet werden.

2) „Die Funktionen $g_0(x), g_1(x), \cdots g_n(x), \cdots$ seien in einem bestimmten Bereiche $\mathfrak{B}$, welcher eine Linie oder Fläche sein kann, für solche Werte der Veränderlichen x, welche sich dem Punkte c unbegrenzt nähern, eindeutig definiert und für alle diese Werte von x sei die unendliche Reihe $\Sigma g_n(x)$ absolut konvergent und

$$\sum_0^\infty{}^n |g_n(x)| < A, \qquad (\alpha)$$

wobei A eine feste positive Zahl bedeutet. Ferner konvergiere $g_n(x)$ für die genannten Werte von x bei unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig zur Null, d. h. zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gehöre eine andere $\mu > 0$ so, daß

$$\text{neben } n > \mu \quad |g_n(x)| < \varepsilon \qquad (\beta)$$

ist, welchen von den angegebenen Werten x auch haben möge. Überdies nehmen wir noch an, daß bei einem gewissen, im Bereiche $\mathfrak{B}$ zulässigen Grenzübergange $\lim x = c$ jede der Funktionen $g_n(x)$ je einen bestimmten Grenzwert a_n besitze, welcher zufolge (α) stets endlich ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist zur Existenz eines endlichen Grenzwertes des im Bereiche $\mathfrak{B}$ unbedingt konvergenten unendlichen Produktes

$$f(x) = \prod_0^\infty{}^n (1 + g_n(x))$$

bei $\lim x = c$ hinreichend, daß $\Sigma g_n(x)$ bei dem nämlichen Grenzübergange einen solchen Grenzwert besitze. Ebenso ist, damit

$$\lim_{x=c} f(x) = \prod_0^\infty{}^n (1 + a_n) \qquad (\gamma)$$

sei, hinreichend, daß die Beziehung

$$\lim_{x=c} \sum_0^\infty{}^n g_n(x) = \sum_0^\infty{}^n a_n \qquad (\delta)$$

bestehe. — Diese Bedingungen sind zugleich auch notwendig, falls die Veränderliche x sowie die Funktionen $g_n(x)$ reell sind und keine der Zahlen

$$1 + a_0,\ 1 + a_1, \cdots 1 + a_n, \cdots \qquad (\varepsilon)$$

Null ist. Dagegen sind sie nicht notwendig, wenn auch nur eine dieser Zahlen verschwindet, und nicht unbedingt notwendig, wenn die Veränderliche x oder die Funktionen $g_n(x)$ auch komplexe Werte annehmen können."[1])

Beweis. Wir denken uns in der zweiten Ungleichung (β) $\varepsilon < 1$ und bezeichnen mit m einen bestimmten Wert von n, größer als μ. Setzen wir sodann

1) Diesen Satz hat C. Arzelà [Memorie di Bologna, ser. 4, tom. 4 (1883), p. 429] unter Beschränkung auf das reelle Zahlengebiet aufgestellt und bewiesen. Auch der im Texte enthaltene Beweis desselben ist, insoweit als es sich um die Hinlänglichkeit der obigen Bedingungen handelt, im Prinzipe nach Arzelà.

$$p_m(x) = \prod_0^m (1 + g_r(x)),$$

so ist

$$f(x) = p_m(x) e^{\sum_{m+1}^{\infty} l(1+g_r(x))}; \qquad (\zeta)$$

denn wegen

$$|g_n(x)| < \varepsilon < 1 \qquad (n > \mu) \qquad (\eta)$$

kann keiner der Ausdrücke $1 + g_r(x)$ $(r = m+1, m+2, \cdots)$ den Wert Null annehmen. Aus demselben Grunde hat man aber für $r \geqq m$

$$l(1 + g_r(x)) = g_r(x) - \tfrac{1}{2}(g_r(x))^2 + \tfrac{1}{3}(g_r(x))^3 - \cdots$$

oder, indem man

$$\varphi(y) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}y^2 - \tfrac{1}{5}y^3 + \cdots \qquad (\vartheta)$$

setzt,

$$l(1 + g_r(x)) = g_r(x) - \varphi(g_r(x)) \cdot (g_r(x))^2. \qquad (\iota)$$

Es ist daher, wenn wir zur Abkürzung noch

$$\psi_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty} \varphi(g_r(x)) \cdot (g_r(x))^2 \qquad (\varkappa)$$

schreiben, zufolge (ζ) und (ι)

$$f(x) = p_m(x) e^{\sum_{m+1}^{\infty} g_r(x) - \psi_m(x)}. \qquad (\lambda)$$

Nun ist nach (ϑ) und (η) für $r \geqq m > \mu$

$$|\varphi(g_r(x))| < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3}{5} + \cdots < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{3(1-\varepsilon)},$$

also jedenfalls

$$|\varphi(g_r(x))| < 1,$$

wenn man nur $\varepsilon < \frac{3}{5}$ nimmt, und gemäß der Voraussetzung (β) gehört zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine andere μ' derart, daß neben $n > \mu'$ $|g_r(x)| < \varepsilon'$ ist. Nehmen wir $\varepsilon' < \frac{3}{5}$ und wählen eine natürliche Zahl k so, daß $m + k > \mu'$ ist, so finden wir daher mit Rücksicht auf die Voraussetzung (α) die Beziehung

$$\left| \sum_{m+k}^{\infty} \varphi(g_r(x)) \cdot (g_r(x))^2 \right| < \varepsilon' \sum_{m+k}^{\infty} |g_r(x)| < \varepsilon' A,$$

welche uns besagt, daß die Reihe $(\varkappa)$ für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert. Da $\varphi(y)$ für alle y, deren Betrag kleiner als 1 ist, stetig, also

$$\lim_{x=c} \varphi(g_r(x)) = \varphi(a_r) \qquad (r = m+1, m+2, \cdots)$$

ist, so folgt nunmehr nach dem Satze S. 132 aus $(\varkappa)$

$$\lim_{x=c} \psi_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty r} \varphi(a_r) \cdot a_r^2$$

oder, weil wegen (ι)

$$\varphi(a_r) \cdot a_r^2 = a_r - l(1 + a_r)$$

ist,

$$\lim_{x=c} \psi_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty r} a_r - \sum_{m+1}^{\infty r} l(1 + a_r). \qquad (\mu)$$

Es hat also $\psi_m(x)$ bei $\lim x = c$ einen bestimmten endlichen Grenzwert und infolgedessen erkennt man aus der Formel (λ) unmittelbar, daß es zur Existenz eines endlichen Grenzwertes von $f(x)$ bei $\lim x = c$ hinreicht, wenn $\Sigma g_n(x)$ einen solchen Grenzwert bei $\lim x = c$ besitzt. Besteht außerdem die Gleichung (δ), so folgt wegen

$$\lim_{x=c} p_m(x) = \prod_{0}^{m r} (1 + a_r) \qquad (\nu)$$

aus (λ) und (μ)

$$\lim_{x=c} f(x) = \prod_{0}^{m r} (1 + a_r) \cdot e^{\sum_{m+1}^{\infty r} l(1+a_r)} = \prod_{0}^{\infty r} (1 + a_r).$$

Hiermit ist unser Satz, insoweit als es sich um die in demselben angegebenen hinreichenden Bedingungen handelt, erledigt.

Sind die Größen x und $g_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ sämtlich reell und ist von den Zahlen (ε) keine Null, so ersieht man aus der Gleichung (λ) im Hinblicke auf (μ) und (ν) sofort, daß, falls $f(x)$ bei $\lim x = c$ einen endlichen Grenzwert hat, nunmehr auch $\Sigma g_n(x)$ beim nämlichen Grenzübergange einen endlichen Grenzwert besitzen muß; denn der Fall $\lim_{x=c} f(x) = 0$, der nach (λ) die Beziehung

$$\lim_{x=c} \sum_{m+1}^{\infty r} g_r(x) = -\infty, \quad \text{also auch} \quad \lim_{x=c} \sum_{0}^{\infty n} g_n(x) = -\infty$$

zur Folge hätte, ist hier ausgeschlossen, da $\Sigma g_n(x)$ bei $\lim x = c$ gemäß der Voraussetzung (α) einen endlichen Grenzwert oder mindestens zwei endliche Unbestimmtheitsgrenzen besitzt. Auch folgt aus (λ) mit Rücksicht auf (μ) und (ν) unmittelbar, daß unter der gegenwärtigen Annahme neben (γ) auch die Gleichung (δ) bestehen muß. Demnach sind die im Satze aufgestellten Bedingungen dafür, daß $f(x)$ bei $\lim x = c$ einen endlichen Grenzwert, bezw. den Grenzwert $\prod_{0}^{\infty n} (1 + a_n)$ besitze, im vorliegenden Falle nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

Wir nehmen jetzt an, daß von den Zahlen (ε) mindestens eine

Null sei. Zufolge (η) ist dies nur in der Weise möglich, daß einer von den Ausdrücken

$$1 + a_0,\ 1 + a_1, \cdots 1 + a_{m-1}$$

verschwindet. Nach (ν) ist sodann

$$\lim_{x=c} p_m(x) = 0$$

und, da $\sum_{m+1}^{\infty} g_r(x)$ seinem absoluten Betrage nach sowohl bei reellen als auch bei komplexen x und $g_r(x)$ zufolge (α) stets unter der positiven Zahl A bleibt und $\psi_m(x)$, wie schon gezeigt wurde, bei $\lim x = c$ einen endlichen Grenzwert hat, so findet man aus (λ)

$$\lim_{x=c} f(x) = 0.$$

Weil jetzt auch

$$\prod_0^{\infty}(1 + a_n) = 0$$

ist, so besteht im vorliegenden Falle immer auch die Gleichung (γ).

Es erübrigt uns nun noch, den Nachweis zu erbringen, daß die im Satze angegebenen Bedingungen, falls die Veränderliche x oder die Funktionen $g_n(x)$ auch komplexer Werte fähig sind, nicht unbedingt notwendig sind. Hierzu genügt das folgende Beispiel. Wir beschränken die Veränderliche x auf das reelle Intervall $(\frac{6}{7}, 1)$ und setzen

$$g_n(x) = x^n(1 - x)\omega(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

wobei $\omega(x) = 0$ für alle rationalen, und $\omega(x) = 2\pi i$ für alle irrationalen Werte von x im Intervalle $(\frac{6}{7}, 1)$ sein soll. Für alle diese Werte von x ist dann

$$|g_n(x)| \leqq 2\pi(1 - x) \leqq \frac{2\pi}{7} < 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (\xi)$$

Zugleich hat man für $n \geqq 1$ nach „Arithmetik" S. 186

$$|g_n(x)| \leqq 2\pi(1 - x)\{1 - (1 - x)\}^n < \frac{2\pi(1 - x)}{1 + n(1 - x)} < \frac{2\pi}{n},$$

also $|g_n(x)| < \varepsilon$, sobald als $n > \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ist. Dies gilt zunächst nur für $x < 1$, bleibt aber auch für $x = 1$ richtig, da $g_n(1) = 0$ ist. Es konvergiert demnach $g_n(x)$ im Intervalle $(\frac{6}{7}, 1)$ bei unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig zur Grenze Null. Ferner hat man

$$\sum_0^{\infty} |g_n(x)| \leqq 2\pi \sum_0^{\infty} x^n(1 - x) = 2\pi$$

und

$$\lim_{x=1-0} g_n(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

so daß die sämtlichen Voraussetzungen unseres Satzes für den

Grenzübergang $\lim x = 1 - 0$ erfüllt sind. Dagegen hat jetzt $\Sigma g_n(x)$ bei $\lim x = 1 - 0$ keinen Grenzwert; denn es ist

$$\sum_0^\infty{}_n g(x) = \omega(x) \sum_0^\infty{}_n x^n(1-x) = 0 \quad \text{oder} \quad 2\pi i, \qquad (o)$$

je nachdem x rational oder irrational ist. Trotzdem hat $f(x)$ im vorliegenden Falle bei $\lim x = 1 - 0$ einen endlichen Grenzwert und es besteht noch dazu die Gleichung (γ). Denn wegen (ξ) dürfen wir hier an Stelle der Gleichung (λ)

$$f(x) = e^{\sum_0^\infty{}_n g_n(x) - \psi(x)}$$

schreiben, wobei dann

$$\psi(x) = \sum_0^\infty{}_n \varphi(g_n(x)) \cdot (g_n(x))^2$$

ist. Da aber $e^0 = e^{2\pi i} = 1$ ist, so geht die erstere Gleichung zufolge (o) in

$$f(x) = e^{-\psi(x)}$$

über und die Formel (μ), in der jetzt $m + 1$ und ebenso die Zahlen a_r durch Null zu ersetzen sind, ergibt

$$\lim_{x=1-0} \psi(x) = 0;$$

demnach ist in unserem Beispiele

$$\lim_{x=1-0} f(x) = 1.$$

Aus dem vorstehenden Satze folgt unmittelbar:

Folgesatz. „Sind die Funktionen $g_0(x), g_1(x), \cdots g_n(x), \cdots$ in einem stetigen, den Punkt $x = c$ enthaltenden Bereiche der Veränderlichen x definiert und sämtlich an der Stelle $x = c$ stetig, während sie im übrigen den Voraussetzungen des Satzes 2) genügen, so ist zur Stetigkeit des unendlichen Produktes

$$f(x) = \prod_0^\infty{}_n (1 + g_n(x))$$

an der Stelle $x = c$ hinreichend und, falls nur reelle Zahlen zugelassen werden und $f(c)$ nicht Null ist, auch notwendig, daß $\sum_0^\infty{}_n g_n(x)$ an derselben Stelle stetig sei."

7. Fortsetzung. Gleichmäßige Konvergenz unendlicher Produkte, welche von einer Veränderlichen abhängen.

Weitere Sätze über die in Rede stehenden Produkte lassen sich mit Hilfe des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz derselben ab-

leiten. Das (bedingt oder unbedingt) konvergente unendliche Produkt

$$f(x) = \prod_0^\infty (1 + g_n(x)), \tag{1}$$

worin jede der Funktionen

$$1 + g_n(x) = f_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

innerhalb eines und desselben Bereiches $\mathfrak{B}$ eindeutig definiert sein soll, heißt gleichmäßig konvergent für alle Werte von x in diesem Bereiche $\mathfrak{B}$, wenn jeder positiven Zahl ε eine andere μ sich so zuordnen läßt, daß für jeden der genannten Werte von x neben $n > \mu$

$$|f_{n+1}(x) f_{n+2}(x) \cdots f_{n+r}(x) - 1| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

ist.[1]) Für den Fall, daß die Konvergenz des Produktes

$$R_n(x) = \prod_{n+1}^\infty f_r(x)$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$ für jeden Wert $n = 0, 1, 2, \cdots$ feststeht, was z. B. zutrifft, wenn das Produkt (1) in diesem Bereiche absolut konvergiert, kann man die Bedingung (2) durch

$$|R_n(x) - 1| < \varepsilon' \qquad (n > \mu) \tag{2*}$$

ersetzen. Denn aus (2) folgt $|R_n(x) - 1| \leqq \varepsilon$, also wenn man $\varepsilon < \varepsilon'$ nimmt, $|R_n(x) - 1| < \varepsilon'$; somit ist die Bedingung (2*) zur gleichmäßigen Konvergenz notwendig.

Setzen wir zur Abkürzung

$$Q_{n,r}(x) = f_{n+1}(x) f_{n+2}(x) \cdots f_{n+r}(x),$$

so ergibt sich umgekehrt aus (2*)

$$|Q_{n,r}(x) - 1| = \left| \frac{R_n(x)}{R_{n+r}(x)} - 1 \right| = \frac{1}{|R_{n+r}(x)|} \cdot |R_n(x) - R_{n+r}(x)|$$

$$< \frac{2\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon,$$

wenn nur $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}$ genommen wird, die Bedingung (2*) ist daher zur gleichmäßigen Konvergenz des Produktes (1) auch hinreichend.

1. Satz. „Wenn das unendliche Produkt (1) gleichmäßig für die Werte von x im Bereiche $\mathfrak{B}$ konvergiert und man

$$Q_{m,0}(x) = 1, \quad Q_{m,r}(x) = f_{m+1}(x) f_{m+2}(x) \cdots f_{m+r}(x) \quad (r \geqq 1; m \geqq -1) \tag{3}$$

setzt, so gibt es solche ganze Zahlen m, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty {}_k\, g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x) \tag{4}$$

für die nämlichen Werte von x gleichmäßig konvergiert.

1) Mittag-Leffler, Acta math. IV, p. 31.

Hierbei darf man m durch jede ganze Zahl, welche größer als m ist, ersetzen und es ist nach dem Satze 6) in Nr. 1

$$1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{k} g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x) = \prod_{1}^{\infty}{}_{r} (1 + g_{m+r}(x)).\text{“} \tag{5}$$

Beweis. Zufolge (2) und (3) ist für $m > \mu$

$$|\, Q_{m,r}(x) - 1\,| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

also, da nach dem Satze 6) in Nr. 1

$$Q_{m,r}(x) = 1 + \sum_{1}^{r}{}_{k} g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x)$$

ist,

$$\left| \sum_{1}^{r}{}_{k} g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x) \right| < \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \cdots). \tag{7}$$

Wir denken uns nun die Werte von ε und m festgelegt und betrachten den Ausdruck

$$R_{r,s}(x) = \sum_{r+1}^{r+s}{}_{k} g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x) = \sum_{1}^{s}{}_{k} g_{m+r+k}(x)\, Q_{m,r+k-1}(x);$$

derselbe läßt sich, weil nach (3)

$$Q_{m,r+k-1}(x) = Q_{m,r}(x)\, Q_{m+r,k-1}(x)$$

ist, auf die Gestalt

$$R_{r,s}(x) = Q_{m,r}(x) \sum_{1}^{s}{}_{k} g_{m+r+k}(x)\, Q_{m+r,k-1}(x)$$

bringen. Wegen (7) gibt es aber zu jeder Zahl $\varepsilon' > 0$ eine andere $\mu' > 0$ derart, daß

$$\left| \sum_{1}^{s}{}_{k} g_{m+r+k}(x)\, Q_{m+r,k-1}(x) \right| < \varepsilon' \quad (s = 1, 2, \cdots)$$

ist, wenn nur $m + r > \mu'$, d. i. $r > \mu' - m$ genommen wird. Weil nach (6) noch

$$|\, Q_{m,r}(x)\,| < 1 + \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

ist, so hat man demnach für $r > \mu' - m$

$$|\, R_{r,s}(x)\,| < (1 + \varepsilon)\varepsilon' \qquad (s = 1, 2, \cdots),$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung bei geeigneter Wahl von ε' jede noch so kleine positive Zahl darstellen kann, so ist hiermit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4) erwiesen.

Folgesatz. „Sind die Faktoren des unendlichen Produktes (1) im Bereiche $\mathfrak{B}$ (mit Einschluß seiner Begrenzung) stetige Funktionen von x und konvergiert dasselbe gleichmäßig für alle diese Werte

von x, so stellt es eine für die nämlichen Werte von x stetige Funktion von x dar.[1] — Denn es ist jetzt die Reihe 4, somit auch das Produkt auf der rechten Seite der Gleichung 5 und daher ebenso das Produkt 1 eine stetige Funktion von x.

2. Satz. „Konvergiert das unendliche Produkt 1 gleichmäßig für die Werte von x im Bereiche $\mathfrak{B}$ und ist für alle diese Werte von x

$$g_n(x) < A \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{8}$$

worin A eine feste positive Zahl bedeutet, so konvergiert die Funktion

$$p_n(x) = \prod_0^n (1 + g_r x) \tag{9}$$

für dieselben Werte von x bei unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig zum Grenzwerte $f(x)$, d. h. es gibt zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\mu > 0$ derart, daß neben $n > \mu$

$$p_n(x) - f(x) < \varepsilon$$

ist, welchen Wert im Bereiche $\mathfrak{B}$ x auch immer haben möge."

Dieser Satz, der den Zusammenhang zwischen der oben definierten gleichmäßigen Konvergenz eines unendlichen Produktes und der früher in II, 2 erklärten gleichmäßigen Konvergenz einer Funktion zweier Veränderlichen zu einem von der einen derselben abhängigen Grenzwerte bei vorgeschriebenem Grenzübergange der anderen in voller Klarheit zum Ausdrucke bringt, stellt einen besonderen Fall des ersten Satzes dar. Denn es läßt sich zeigen, daß man unter der Voraussetzung (8) in der Reihe (4) $m = -1$ setzen darf, d. h. daß die dem Produkte (1) äquivalente Reihe

$$1 + g_0(x) + \sum_1^\infty p_{n-1}(x) g_n(x)$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert, woraus der Satz wegen

$$p_n(x) = 1 + g_0(x) + \sum_1^n p_{r-1}(x) g_r(x) \qquad (n \geqq 1)$$

unmittelbar folgt. Noch einfacher ist es, den Satz aus dem Begriffe der gleichmäßigen Konvergenz eines unendlichen Produktes direkt herzuleiten. Nach (1) und (9) hat man nämlich

$$p_n(x) - f(x) = p_n(x)\left\{1 - \prod_{n+1}^\infty (1 + g_r(x))\right\}$$

und daher für $n > \mu$ zufolge (2)

$$|p_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon |p_n(x)|. \tag{10}$$

1) J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 1886, p. 201.

Auf Grund derselben Bedingung (2) gibt es aber zu jeder Zahl $\delta > 0$ auch ganze Zahlen m derart, daß unter Beibehaltung der Bezeichnungen (3)

$$|Q_{m,r}(x)| < 1 + \delta \quad (r = 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

ist. Wir denken uns nun den Wert von δ und hierauf auch jenen von m festgelegt und erhalten dann, da

$$p_{m+r}(x) = p_m(x)\, Q_{m,r}(x)$$

ist, aus (10) im Hinblicke auf (8) und (11), indem wir $n = m + r$ setzen,

$$|p_{m+r}(x) - f(x)| < \varepsilon\,(1+\delta)\,(1+A)^m < \varepsilon',$$

wenn nur

$$\varepsilon < \varepsilon' : \{(1+\delta)\,(1+A)^m\}$$

genommen wird, und zwar für alle Werte $r = 1, 2, 3, \cdots$, welche der Bedingung $m + r > \mu$ genügen. Hiermit ist aber der in Rede stehende Satz bewiesen.

3. Satz. „Zur gleichmäßigen Konvergenz des unendlichen Produktes

$$\prod_0^\infty{}_n (1 + |g_n(x)|) \tag{12}$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$ ist notwendig und hinreichend, daß die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n |g_n(x)| \tag{13}$$

in diesem Bereiche gleichmäßig konvergiere."

Beweis. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} F_n(x) &= 1 + |g_n(x)| \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \\ \bar{Q}_{n,0}(x) &= 1, \quad \bar{Q}_{n,r}(x) = F_{n+1}(x) F_{n+2}(x) \cdots F_{n+r}(x) \quad (r = 1, 2, \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

und nehmen zunächst an, daß das Produkt (12) im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiere. Dann gibt es zu einer beliebig vorgelegten Zahl $\varepsilon > 0$, welche wir uns kleiner als 1 denken wollen, eine andere $\mu > 0$ so, daß neben $m > \mu$

$$|\bar{Q}_{m,r}(x) - 1| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad 1 - \varepsilon < \bar{Q}_{m,r}(x) < 1 + \varepsilon \tag{15}$$

ist für $r = 1, 2, \cdots$, welchen Wert x im Bereiche $\mathfrak{B}$ auch immer haben möge. Zufolge des ersten Satzes dieser Nr. können wir dabei einen bestimmten Wert für m so wählen, daß die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n |g_{m+k}(x)|\, \bar{Q}_{m,r-1}(x)$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert. Da nach (15)

$$\frac{1}{\bar{Q}_{m\,r}(x)} < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

ist, so konvergiert sodann ebenfalls gleichmäßig die Reihe

$$\sum_1^\infty{}_k |g_{m+k}(x)|\,\bar{Q}_{m,k-1}(x)\cdot\frac{1}{\bar{Q}_{m,k-1}(x)},\quad \text{d. i.}\quad \sum_1^\infty{}_k |g_{m+k}(x)|$$

und somit auch die Reihe (13).

Treffen wir jetzt umgekehrt die Voraussetzung, daß die Reihe (13) im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiere, so gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$, welche wir uns wieder kleiner als 1 denken, eine andere μ derart, daß für jedes x des Bereiches $\mathfrak{B}$ neben $m > \mu$

$$\sum_{m+1}^\infty{}_k |g_k(x)| < \varepsilon$$

wird. Es ist dann für $n \geqq m$

$$F_n(x) = 1 + |g_n(x)| < \frac{1}{1-|g_n(x)|},$$

also

$$\bar{Q}_{m,r}(x) < \frac{1}{1-\sum_{m+1}^\infty{}_k |g_k(x)|} < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (r = 0, 1, 2, \cdots).$$

Da zufolge (14) außerdem $\bar{Q}_{m,r}(x) \geqq 1$ ist, so haben wir nunmehr

$$0 \leqq \bar{Q}_{m,r}(x) - 1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < \varepsilon',$$

wenn nur $\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$ gewählt wird. Es ist also neben $m > \mu$

$$|F_{m+1}(x)F_{m+2}(x)\cdots F_{m+r}(x) - 1| < \varepsilon' \qquad (r = 1, 2, \cdots)$$

und dies ist die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz des Produktes (12). Hiermit ist aber bewiesen, daß neben (12) jedesmal auch (13) und umgekehrt neben (13) jedesmal auch (12) gleichmäßig konvergiert, so daß die im Satze ausgesprochene Bedingung notwendig und hinreichend ist.

4. Satz. „Zur gleichmäßigen Konvergenz des unendlichen Produktes (1) (S. 426) im Bereiche $\mathfrak{B}$ reicht es hin, daß die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty{}_n |g_n(x)|$$

in diesem Bereiche gleichmäßig konvergiere."

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß, wenn diese Bedingung erfüllt ist, das Produkt (1) absolut konvergiert. Nach der Formel (5) ist daher

$$\prod_{n+1}^\infty{}_r (1 + g_r(x)) - 1 = \sum_1^\infty{}_k g_{n+k}(x)\,Q_{n,k-1}(x),$$

worin $Q_{n,0}(x) = 1$ und für $k > 1$

$$|Q_{n,k-1}(x)| = |f_{n+1}(x)f_{n+2}(x)\cdots f_{n+k-1}(x)|$$
$$\leqq F_{n+1}(x)F_{n+2}(x)\cdots F_{n+k-1}(x) = \bar{Q}_{n,k-1}(x)$$

ist. Da nun nach dem 3. Satze das Produkt (12) gleichmäßig im Bereiche $\mathfrak{B}$ konvergiert, so ist nach (15) neben $n > \mu$

$$\bar{Q}_{n,k-1}(x) < 1 + \varepsilon, \quad \text{also auch} \quad |Q_{n,k-1}(x)| < 1 + \varepsilon$$

und daher

$$\left| \prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + g_r(x)) - 1 \right| < (1+\varepsilon) \sum_{1}^{\infty}{}_k |g_{n+k}(x)|.$$

Hieraus ist aber unmittelbar ersichtlich, daß neben der Reihe $\Sigma|g_n(x)|$ auch das Produkt (1) gleichmäßig konvergiert.

Aus dem 3. und 4. Satze folgt:

„Wenn das unendliche Produkt

$$\prod_{0}^{\infty}{}_n (1 + |g_n(x)|)$$

im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch

$$\prod_{0}^{\infty}{}_n (1 + g_n(x))$$

für die nämlichen Werte von x gleichmäßig."

5. Satz nach Arzelà.[1]) „Wenn für alle Werte von x im Bereiche $\mathfrak{B}$ die Beziehung besteht

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n |g_n(x)| < A, \tag{16}$$

worin A eine feste positive Zahl vorstellt, und dabei die Funktion $g_n(x)$ bei unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig zur Null konvergiert, also zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\mu > 0$ so gehört, daß für jeden Wert von x im Bereiche $\mathfrak{B}$

$$\text{neben } n > \mu \qquad |g_n(x)| < \varepsilon \tag{17}$$

ist, so ist zur gleichmäßigen Konvergenz des unendlichen Produktes (1) im Bereiche $\mathfrak{B}$ notwendig und hinreichend, daß die unendliche Reihe

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n g_n(x) \tag{18}$$

in diesem Bereiche gleichmäßig konvergiere. — Man kann noch bemerken, daß zufolge (16) sowohl die Reihe (18) als auch das Produkt (1) unbedingt konvergiert."

---

1) Arzelà (a. a. O. S. 427) hat den Satz unter der Voraussetzung, daß alle darin vorkommenden Größen reell sind, gegeben.

Beweis. Da die unbedingte Konvergenz des Produktes (1) feststeht, setzen wir

$$R_n(x) = \prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + g_n(x)) = e^{\sum_{n+1}^{\infty}{}_r l(1+g_r(x))},$$

wobei wir uns $n > \mu$ denken. Lassen wir zudem in (17) $\varepsilon < 1$ sein, so können wir auf die rechte Seite der vorstehenden Gleichung die beim Beweise des Satzes 2) in Nr. 6 benützte Umformung anwenden und haben dann

$$R_n(x) = e^{\sum_{n+1}^{\infty}{}_r g_r(x) - \psi_n(x)}, \tag{19}$$

wobei

$$\psi_n(x) = \sum_{n+1}^{\infty}{}_r \varphi(g_r(x)) \cdot (g_r(x))^2 \tag{20}$$

und

$$\varphi(y) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}y^2 - \cdots$$

ist. Die Reihe (20) konvergiert, unter den Voraussetzungen (16) und (17), wie wir a. a. O. gezeigt haben, gleichmäßig für alle x des Bereiches $\mathfrak{B}$.

Angenommen nun, es sei auch die Reihe (18) in dem genannten Bereiche gleichmäßig konvergent, dann gehört zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine andere $\mu > 0$ von der Beschaffenheit, daß neben $n > \mu$

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty}{}_r g_r(x) - \psi_n(x) \right| < \varepsilon \tag{21}$$

ist. Setzt man

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}_r g_r(x) - \psi_n(x) = u_n + v_n i, \tag{22}$$

d. h. zerlegt man den Ausdruck links in seinen reellen und imaginären Bestandteil, so sind die reellen Größen u_n und v_n zwar außer von n auch noch von x abhängig; zufolge (21) ist aber für jedes x des Bereiches $\mathfrak{B}$ sowohl u_n als v_n seinem Betrage nach kleiner als ε, wenn nur $n > \mu$ genommen wird. Nach (19) hat man nun

$$R_n(x) = e^{u_n + v_n i} = e^{u_n} \cos v_n + i e^{u_n} \sin v_n,$$

mithin

$$|R_n(x) - 1|^2 = e^{2u_n} - 2e^{u_n} \cos v_n + 1 = (e^{u_n} - 1)^2 + 4e^{u_n} \left(\sin \frac{v_n}{2}\right)^2, \tag{23}$$

woraus sich nach dem Gesagten für $n > \mu$

$$|R_n(x) - 1|^2 < (e^{\varepsilon} - 1)^2 + \varepsilon^2 e^{\varepsilon}$$

ergibt. Diese Ungleichung besagt aber, da ihre rechte Seite bei $\lim \varepsilon = +0$ den Grenzwert Null hat, daß das Produkt (1) gleichmäßig konvergiert. Die im Satze ausgesprochene Bedingung ist demnach hinreichend.

Um auch die Notwendigkeit derselben nachzuweisen, setzen wir jetzt voraus, daß das unendliche Produkt (1) im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiere. Es soll also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ derart geben, daß neben $n > \mu$

$$|R_n(x) - 1| < \varepsilon$$

ist. Zufolge (23) muß sodann neben $n > \mu$

$$(e^{u_n} - 1)^2 + 4e^{u_n}\left(\sin\frac{v_n}{2}\right)^2 < \varepsilon^2 \tag{24}$$

sein. Demnach gestaltet sich der in Rede stehende Nachweis sehr einfach, wenn wir zunächst die Annahme machen, daß die sämtlichen im Satze auftretenden Größen reell seien. Denn jetzt ist $v_n = 0$, so daß die Ungleichung (24) in

$$-\varepsilon < e^{u_n} - 1 < \varepsilon, \quad \text{d. i.} \quad l(1-\varepsilon) < u_n < l(1+\varepsilon)$$

übergeht. Da

$$\lim_{\varepsilon = +0} l(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon = +0} l(1+\varepsilon) = 0$$

ist, so muß daher zu jedem $\delta > 0$ ein μ' so gehören, daß neben $n > \mu'$

$$|u_n| < \delta,$$

also gemäß der Gleichung (22) wegen $v_n = 0$

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} g_r(x) - \psi_n(x)\right| < \delta \tag{25}$$

ist. Weil aber $\psi_n(x)$ bei unbegrenzt wachsendem n für alle x im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig zur Null konvergiert, so kann man μ' stets so wählen, daß neben $n > \mu'$ auch $|\psi_n(x)| < \delta$ ist, und die Ungleichung (25) ergibt dann

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} g_r(x)\right| < 2\delta$$

für $n > \mu'$, d. h. die Reihe (18) konvergiert gleichmäßig.

Etwas schwieriger wird dieser Nachweis, wenn man für x und die Funktionen $g_n(x)$ auch komplexe Werte zuläßt. Zufolge (24) muß in diesem Falle neben $n > \mu$

$$|e^{u_n} - 1| < \varepsilon \quad \text{und} \quad 4e^{u_n}\left(\sin\frac{v_n}{2}\right)^2 < \varepsilon^2,$$

also, wenn man $\varepsilon < 1$ nimmt,

$$1 - \varepsilon < e^{u_n} < 1 + \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\sin\frac{v_n}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\varepsilon}}$$

sein, woraus man erkennt, daß u_n und $\sin\frac{v_n}{2}$ für alle x im Bereiche $\mathfrak{B}$ bei $\lim n = +\infty$ gleichmäßig zur Null konvergieren. Wir können nun v_n stets auf die Form bringen

$$v_n = 2\nu_n\pi + 2v_n', \tag{26}$$

wobei ν_n eine im allgemeinen von n und x abhängige, ganze Zahl bedeuten soll, während v_n' der Beschränkung

$$-\frac{\pi}{2} < v_n' \leqq \frac{\pi}{2}$$

unterliegt. Da gemäß dieser Festsetzung

$$\left|\sin\frac{v_n}{2}\right| = |\sin v_n'|$$

ist, so muß neben $\sin\frac{v_n}{2}$ auch v_n' bei $\lim n = +\infty$ gleichmäßig zur Null konvergieren. Setzt man nun

$$\chi_n(x) = u_n + 2v_n'i + \psi_n(x),$$

so ist auch $\chi_n(x)$ eine Funktion, welche bei $\lim n = +\infty$ für alle x im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig zur Null konvergiert, und man hat nach (22) und (26)

$$\sum_{n+1}^{\infty} g_r(x) = \chi_n(x) + 2\nu_n\pi i. \tag{27}$$

Daneben ist aber

$$\sum_{n+2}^{\infty} g_r(x) = \chi_{n+1}(x) + 2\nu_{n+1}\pi i$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen erhält man

$$g_{n+1}(x) = \chi_n(x) - \chi_{n+1}(x) + 2(\nu_n - \nu_{n+1})\pi i.$$

Zufolge der Voraussetzung (17) und der gleichmäßigen Konvergenz von $\chi_n(x)$ zur Null bei $\lim n = +\infty$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ derart, daß neben $n > \mu$

$$|g_{n+1}(x)| < \varepsilon, \quad |\chi_n(x)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |\chi_{n+1}(x)| < \varepsilon,$$

also

$$2\pi\,|\nu_n - \nu_{n+1}| < 3\varepsilon$$

ist. Nimmt man hier $\varepsilon \leqq \frac{2\pi}{3}$, so folgt daraus, da ν_n und ν_{n+1} ganze Zahlen sind, $\nu_{n+1} = \nu_n$, d. h. ν_n ist bei hinlänglich großen Werten des n von n unabhängig. Nach (27) können wir daher für $n > \mu$

$$\sum_{n+1}^{\infty} g_r(x) = \chi_n(x) + 2\pi i \cdot \nu(x) \tag{28}$$

setzen, wobei dann $\nu(x)$ eine nur von x abhängige ganze Zahl ist. Nun denken wir uns dem x einen bestimmten Wert im Bereiche $\mathfrak{B}$

erteilt und lassen n zur Grenze $+\infty$ übergehen. Es ist dabei $\lim \chi_n(x) = 0$ und wegen der Konvergenz der Reihe (18) auch

$$\lim_{n=+\infty} \sum_{n+1}^{\infty} g_r(x) = 0;$$

somit folgt aus (28) $v(x) = 0$. Da dies für jeden Wert x im Bereiche $\mathfrak{B}$ gilt, so hat man also

$$\sum_{n+1}^{\infty} g_r(x) = \chi_n(x) \qquad (n > \mu),$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (18) ersichtlich ist. Dieselbe ist daher zur gleichmäßigen Konvergenz des Produktes (1) unter den im Satze ausgesprochenen Voraussetzungen auch notwendig.

6. **Satz.** „Bedeuten die Funktionen

$$f_n(x) = 1 + g_n(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

endliche oder unendliche Reihen nach ganzen Potenzen von x, welche für alle Werte von x, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Zahlen R' und R $(0 \leqq R' < R)$ liegt, konvergieren, und konvergiert das unendliche Produkt (1) gleichmäßig für die genannten Werte ven x zum Grenzwerte $f(x)$, so gibt es eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche für alle Werte von x, wofür

$$R' < |x| < R$$

ist, konvergiert und gleich $f(x)$ ist."

Beweis. Nach dem 1. Satze dieser Nummer konvergiert die Reihe (4) S. 426 gleichmäßig für die genannten Werte von x und ihre Glieder

$$g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x)$$

können, da sie endliche Produkte von absolut konvergenten Reihen nach ganzen Potenzen von x sind, selbst in solche Reihen verwandelt werden. Diese Reihen erfüllen aber die Bedingungen des Weierstraßschen Doppelreihensatzes S. 206. Demnach gibt es eine Reihe $P(x)$ nach ganzen Potenzen von x, die für alle Werte von x, wofür $R' < |x| < R$ ist, der Reihe

$$1 + \sum_{1}^{\infty} g_{m+k}(x)\, Q_{m,k-1}(x)$$

gleich ist. Zufolge der Formel (5) S. 427 hat man daher

$$f(x) = \prod_{0}^{\infty} f_r(x) = \prod_{0}^{m} f_r(x) \cdot \prod_{1}^{\infty} f_{m+r}(x) = P(x) \prod_{0}^{m} f_r(x),$$

d. h. es ist $f(x)$ ein Produkt aus einer endlichen Anzahl von Reihen nach ganzen Potenzen von x und kann daher selbst in eine solche Reihe entwickelt werden.

8. Bedingt konvergente unendliche Produkte.

Wenn Σa_n nicht absolut konvergiert, so muß die Reihe $\Sigma l(1+a_n)$, wenn sie überhaupt konvergiert, nach dem ersten Zusatze in Nr. 4 bedingt konvergieren.[1]) Wenn das letztere zutrifft, so konvergiert zufolge der Sätze 6) und 7) in Nr. 2 auch das Produkt $\prod_0^\infty (1+a_n)$ bedingt und kann im Falle, daß die a_n sämtlich reell nnd größer als -1 sind, durch geeignete Anordnung der Faktoren jeden nicht-negativen Grenzwert erlangen und auch divergent werden (vgl. Nr. 3).

Satz.[2]) „Es seien $a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots$ reelle oder komplexe Zahlen, worunter jedoch -1 nicht vorkommen soll, und es sei

$$a_n - \tfrac{1}{2}a_n^2 + \tfrac{1}{3}a_n^3 - \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1}a_n^{m-1} = A_{n,m} \qquad (m \geqq 2).$$

Wenn die unendliche Reihe

$$A_{0,m} + A_{1,m} + \cdots + A_{n,m} + \cdots \tag{a}$$

mindestens bedingt, $\sum_0^\infty a_n^m$ absolut konvergiert, so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (1+a_n) \tag{b}$$

sicher bei der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung der Faktoren und zwar ist sein Grenzwert von Null verschieden. Die Konvergenz des Produktes (b) ist zugleich mit jener der Reihe (a) bedingt oder unbedingt."

Beweis. Das Produkt (b) konvergiert, da die Reihe

$$\Sigma l(1+a_n)$$

---

1) Daß $\Sigma l(1+a_n)$, auch wenn Σa_n unbedingt divergiert, noch bedingt konvergieren kann, zeigt das als Übung 13) aufgestellte Beispiel.

2) Der von Cauchy gegebene besondere Fall des Satzes steht in Cours d'Analyse, p. 563. Für reelle a_n und gerade m fand den Satz F. Arndt [Grunert Archiv 21 (1853), S. 86]. Die im Zusatze ausgesprochene Verallgemeinerung des Satzes rührt von A. Pringsheim her (vgl. Math. Annalen 22, S. 482). Daselbst sind auch die Wertveränderungen bedingt konvergenter Produkte bei Umstellung der Faktoren untersucht.

konvergent ist. Um die Konvergenz der letzteren nachzuweisen, setzen wir, was wegen

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0 \tag{c}$$

für hinlänglich große Werte von n $(n \geqq n_0)$ erlaubt ist,

$$l(1+a_n) = A_{n,m} + \frac{(-1)^{m+1}}{m} a_n^m R_n, \tag{d}$$

so daß

$$R_n = 1 - \frac{m}{m+1} a_n + \frac{m}{m+2} a_n^2 - \cdots$$

ist. Es besteht dann, da zufolge (c) jeder positiven Zahl $\varepsilon < 1$ eine positive Zahl μ sich so zuordnen läßt, daß für $n > \mu$ $|a_n| < \varepsilon$ ist, für $n > \mu$ die Relation

$$|R_n| < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots = 1 : (1-\varepsilon).$$

Somit konvergiert nach dem 3. Satze in „Arithmetik" S. 388 die Reihe

$$\sum_{n_0}^{\infty} a_n^m R_n \tag{e}$$

absolut, demnach die Reihe $\Sigma l(1+a_n)$ und mit ihr auch das Produkt (b) bedingt oder unbedingt, je nachdem die Reihe (a) bedingt oder unbedingt konvergiert. Daß der Grenzwert von (b) im vorliegenden Falle von Null verschieden ist, folgt unmittelbar aus dem Satze 6) in Nr. 2.

Zusatz. „Wenn die Reihen Σa_n, $\Sigma a_n^2, \ldots, \Sigma a_n^{m-1}$ $(m \geqq 2)$ bedingt, Σa_n^m absolut konvergiert, so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_0^{\infty}(1 + a_n x)$$

bedingt sicher bei der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung der Faktoren für jedes endliche von Null verschiedene x und zwar ist bei Ausschluß der Werte $x = -1 : a_n$ sein Grenzwert von Null verschieden." — Denn es konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$a_n x - \tfrac{1}{2}(a_n x)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1}(a_n x)^{m-1}$$

für jeden endlichen Wert von x. Somit konvergiert auch das vorliegende Produkt und zwar bedingt, da gemäß der Voraussetzung die Reihe Σa_n, also auch $\Sigma a_n x$ nur bedingt konvergiert (vgl. Nr. 4). — Sind die Zahlen a_n sämtlich reell, so muß Σa_n^2, wenn überhaupt, absolut konvergieren. Der Satz geht dann für $m = 2$, $x = 1$ in den Cauchyschen über: „Wenn Σa_n und Σa_n^2 konvergieren, so konvergiert das unendliche Produkt (b) und sein Grenzwert ist von Null verschieden." So konvergiert das Produkt

$$(1-\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})(1+\tfrac{1}{5})(1-\tfrac{1}{6})\cdots$$

bei dieser Anordnung der Faktoren; sein Grenzwert ist $\frac{1}{2}$.

Im Falle, daß die a_n sämtlich reell sind, die Beziehung (c) besteht und m gleich einer geraden Zahl $2k$ ist, kann man, da für $n > \mu$

$$\frac{1}{1-\varepsilon} > R_n > 1-\varepsilon-\varepsilon^3-\cdots = 1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

ist, noch behaupten, daß, wenn Σa_n^m divergiert, auch die Reihe (e) divergent ist. Hieraus schließt man durch einen Blick auf die Gleichung (d) die folgenden Sätze[1]):

1) „Konvergiert die Reihe (a) und divergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty a_n^{2k} \quad (k \geqq 1), \tag{f}$$

so hat das Produkt (b) bei der durch die Indizes vorgeschriebenen Anordnung der Faktoren den Grenzwert Null. — Das Nämliche gilt, wenn der Ausdruck

$$A_{0,m} + A_{1,m} + \cdots + A_{n,m} \tag{g}$$

bei $\lim n = +\infty$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen hat." — Für $k = 1$ erhält man wieder einen Cauchyschen Satz, demzufolge das Produkt

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\cdots \tag{h}$$

bei dieser Anordnung der Faktoren zum Grenzwerte Null konvergiert.

2) „Divergiert die Reihe (a) und hat sie bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $-\infty$, so hat das Produkt (b) den Grenzwert Null." Z. B. das Produkt

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\cdots,$$

welches dieselben Faktoren wie (h) aber in anderer Anordnung enthält, hat ebenfalls den Grenzwert Null" (vgl. „Arithmetik" S. 246).

3) „Divergiert die Reihe (a) und hat sie bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$, während die Reihe (f) konvergiert, so hat das Produkt (b) den Grenzwert $+\infty$."

4) „Wenn die Unbestimmtheitsgrenzen des Ausdruckes (g) bei $\lim n = +\infty$ voneinander verschieden sind und die Reihe (f) konvergiert, so hat auch das Produkt

---

1) Vgl. Arndt a. a. O. S. 81—86. Daselbst weitere Beispiele.

$$\prod_{0}^{n}{}_{r}(1 + a_r)$$

bei $\lim n = +\infty$ voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen."

9. Die unendlichen Produkte für den Sinus und Kosinus.[1])

Nach „Arithmetik" S. 364 ist für jeden Wert von x

$$e^x = \lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

und demnach

$$e^x - e^{-x} = \lim_{n=+\infty} \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right\}. \tag{1}$$

Der hinter dem Zeichen lim stehende Ausdruck ist eine ganze Funktion vom Grade n in x, die sich leicht in ihre linearen Wurzelfaktoren zerlegen läßt. Setzt man nämlich

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right) : \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

und

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (y^n - 1), \tag{2}$$

so hat man nach IV, 9 mit Rücksicht auf „Arithmetik" S. 356

$$y^n - 1 = (y - 1) \prod_{1}^{n-1}{}_{r}\left(y - \cos\frac{2r\pi}{n} - i\sin\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Denkt man sich hier n ungerade und gleich $2k + 1$, was für unseren Zweck ausreicht, so ergibt sich, indem man die komplex-konjugierten Faktoren auf der rechten Seite miteinander multipliziert,

$$y^n - 1 = (y - 1) \prod_{1}^{k}{}_{r}\left(y^2 + 1 - 2y\cos\frac{2r\pi}{n}\right).$$

Infolgedessen findet man aus (2)

$$g_n(x) = \frac{2^{k+1}x}{n} \prod_{1}^{k}{}_{r}\left\{1 + \frac{x^2}{n^2} - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cos\frac{2r\pi}{n}\right\}$$

$$= \frac{2^n x}{n} \prod_{1}^{k}{}_{r}\left\{\left(\sin\frac{r\pi}{n}\right)^2 + \frac{x^2}{n^2}\left(\cos\frac{r\pi}{n}\right)^2\right\}$$

---

1) Die unendlichen Produkte für den Sinus und Kosinus rühren von Euler her (Introductio in Anal. infin. 1748, I. § 156f.). Das von Euler gegebene Verfahren ist im Texte zur Herleitung des Produktes für den Sinus verwendet. — Vgl. hierüber auch Cauchy, Cours d'Analyse, p. 565; Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen, S. 95; O. Stolz, Vorlesungen über allgem. Arithm. II, S. 248.

d. i.

$$g_n(x) = \frac{2^n x}{n}\left(\prod_1^k \sin\frac{r\pi}{n}\right)^2 \cdot \prod_1^k \left\{1 + \left(\frac{x}{n\tan\frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\}.$$

Entwickelt man sowohl die rechte Seite dieser Gleichung, als auch den in (1) hinter dem Zeichen lim stehenden Ausdruck nach steigenden Potenzen von x und bedenkt, daß die Koeffizienten der gleichen Potenz von x in beiden Entwicklungen übereinstimmen müssen, so ergibt sich durch Vergleichung der beiden ersten Glieder dieser Entwicklungen

$$\left(\prod_1^k \sin\frac{r\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2^{n-1}};$$

demnach läßt sich $g_n(x)$ in der einfacheren Form

$$g_n(x) = 2x \cdot \prod_1^k \left\{1 + \left(\frac{x}{n\tan\frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\}$$

darstellen. Schreibt man zur Abkürzung

$$P_k = \prod_1^k \left\{1 + \left(\frac{x}{n\tan\frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\} \qquad (n = 2k+1),$$

so gewinnt man nunmehr aus (1) und (2) die Beziehung

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{k=+\infty} P_k, \tag{3}$$

deren rechte Seite sich in ein unendliches Produkt verwandeln läßt. Zu letzterem Behufe setzen wir, unter m eine natürliche Zahl kleiner als k verstehend,

$$R_m^{(k)} = \prod_{m+1}^k \left\{1 + \left(\frac{x}{n\tan\frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\} \quad \text{und} \quad X = |x|;$$

es ist dann offenbar

$$|R_m^{(k)} - 1| \leqq \prod_{m+1}^k \left\{1 + \left(\frac{X}{n\tan\frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\} - 1,$$

also, da wegen $0 < \frac{r\pi}{n} \leqq \frac{k\pi}{2k+1} < \frac{\pi}{2}$ $\tan\frac{r\pi}{n} > \frac{r\pi}{n}$ ist,

$$|R_m^{(k)} - 1| < \prod_{m+1}^k \left\{1 + \left(\frac{X}{r\pi}\right)^2\right\} - 1$$

und, wenn man

$$Q_m = \prod_{r=m+1}^{\infty} \left\{1 + \left(\frac{X}{r\pi}\right)^2\right\}$$

setzt,

$$\left|R_m^{(k)} - 1\right| < Q_m - 1 \qquad (k > m).$$

Nach Nr. 4 ist aber das unendliche Produkt

$$\prod_{r=1}^{\infty} \left\{1 + \left(\frac{X}{r\pi}\right)^2\right\}$$

unbedingt konvergent und dabei nicht Null; somit hat nach dem 2. Satze in Nr. 2 Q_m bei $\lim m = +\infty$ den Grenzwert 1. Infolgedessen gibt es zu jeder positiven Zahl ε' eine andere μ derart, daß

$$\text{neben } k > m > \mu \qquad \left|R_m^{(k)} - 1\right| < \varepsilon' \tag{4}$$

ist. Setzt man noch

$$P_m^{(k)} = \prod_{r=1}^{m} \left\{1 + \left(\frac{x}{n \tan \frac{r\pi}{n}}\right)^2\right\} \qquad (n = 2k+1)$$

und

$$p_m = \prod_{r=1}^{m} \left(1 + \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right), \tag{5}$$

so hat man

$$\lim_{k=+\infty} P_m^{(k)} = p_m; \tag{5*}$$

denn es ist

$$\lim_{n=+\infty} n \tan \frac{r\pi}{n} = r\pi \cdot \lim_{n=+\infty} \frac{\sin(r\pi : n)}{r\pi : n} = r\pi.$$

Da nun

$$R_m^{(k)} = P_k : P_m^{(k)}$$

ist, so können wir die Beziehung (4) jetzt in der Gestalt

$$\left|\frac{P_k}{P_m^{(k)}} - 1\right| < \varepsilon' \qquad (k > m > \mu)$$

anschreiben und hieraus ergibt sich mit Hilfe von (3) und (5*), indem man noch, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstehend, $\varepsilon' < \varepsilon$ nimmt, durch den Grenzübergang $\lim k = +\infty$

$$\left|\frac{e^x - e^{-x}}{2xp_m} - 1\right| < \varepsilon \qquad (m > \mu).$$

Diese Ungleichung besagt nach Arithmetik VII. 12, daß

$$\lim_{m=+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2xp_m} = 1$$

ist. Somit hat man im Hinblicke auf (5)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{m=+\infty} p_m = \prod_1^\infty{}_r \left(1 + \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right) \tag{6}$$

und daher, indem man x durch xi ersetzt und hierauf beide Seiten dieser Gleichung mit x multipliziert, nach Formel (36) S. 347

$$\sin x = x \prod_1^\infty{}_r \left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right). \tag{7}$$

Diese Formel gilt auch für $x = 0$, somit für jeden endlichen Wert von x und zwar befindet sich rechts stets ein unbedingt konvergentes Produkt. Schreibt man aber

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots, \tag{8}$$

so konvergiert zwar das links stehende Produkt, aber nur bedingt (Nr. 8); es liefert also nicht bei jeder Anordnung der Faktoren den Grenzwert $\sin x$.

Aus (8) ergibt sich die Formel[1])

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{x}{y}\left(\frac{\pi - x}{\pi - y}\right)\left(\frac{\pi + x}{\pi + y}\right)\left(\frac{2\pi - x}{2\pi - y}\right)\left(\frac{2\pi + x}{2\pi + y}\right)\cdots$$

mit einem ebenfalls bedingt konvergenten Produkte. Ersetzt man in ihr x durch $\frac{1}{2}\pi - x$ und y durch $\frac{1}{2}\pi$, so folgt

$$\cos x = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right)\cdots$$

und, wenn man je zwei aufeinanderfolgende Faktoren vereinigt,

$$\cos x = \prod_0^\infty{}_s \left(1 - \frac{4x^2}{(2s+1)^2\pi^2}\right). \tag{9}$$

In dieser auch für jeden endlichen Wert von x geltenden Formel kommt wieder ein unbedingt konvergentes Produkt vor.

Setzt man in (8) $x = \frac{1}{2}\pi$, so ergibt sich der Wallissche Ausdruck für $\frac{1}{2}\pi$:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

Das wahre Wesen solcher Formeln wie (7) und (9) tritt durch die folgende Bemerkung schon deutlicher hervor. Setzt man in (6) statt x

1) Cauchy, a. a. O. p. 569.

$\frac{1}{2}x$ und multipliziert hierauf mit $xe^{\frac{1}{2}x}$, so erhält man die für alle endlichen Werte von x geltende Formel

$$e^x - 1 = xe^{\frac{1}{2}x} \prod_1^{\infty}{}_r \left\{1 + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right\}.$$

Auf der rechten Seite steht jeder der Wurzeln der Gleichung $e^x = 1$ entsprechend ein Faktor $1 \pm x : 2r\pi i$. Werden sie paarweise in der angedeuteten Weise zusammengefaßt, so erhält man das unbedingt konvergente Produkt

$$x \prod_1^{\infty}{}_r \left(1 + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right),$$

das nach dem 2. Satze in Nr. 5 unmittelbar in eine beständig konvergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandelt werden kann. Der Quotient

$$(e^x - 1) : \mathfrak{P}(x)$$

ist eine eindeutige Funktion, die in allen eigentlichen Punkten der Ebene holomorph ist. Er muß somit nach dem 1. Satze in VII. 11 eine beständig konvergente Reihe $\mathfrak{Q}(x)$ sein, welche für keinen endlichen Wert von x verschwindet. Die Schwierigkeit der Aufgabe, die Funktionen $\sin x$, $e^x - 1$ durch ein unendliches Produkt darzustellen, besteht in der Bestimmung der bezüglichen ganzen rationalen oder transzendenten Funktion $\mathfrak{Q}(x)$.[1])

---

1) Euler stellt a. a. O. § 155 die Funktion $(e^x - 1) : x$ durch den Ausdruck

$$\lim_{k=+\infty} \prod_1^{k}{}_r \left\{1 + \frac{x}{2k+1} + \frac{x^2}{4r^2\pi^2}\right\}$$

dar, welcher von geringer Bedeutung ist. Die im Texte aufgeführte Zerlegung derselben rührt von Cauchy her (Exerc. d. Math. IV. p. 200; Oeuvres complètes, sér. 2, tome 9, p. 240). — Die Aufgabe, die ganzen transzendenten Funktionen in Primfunktionen zu zerlegen, ist erst von Weierstraß vollständig gelöst worden (vgl. seine Abhandlung „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen" 1876; Werke II, S. 77). Nach Weierstraß hat man

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{-\infty}^{+\infty}{}'_r \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{\frac{x}{r}},$$

wo r alle ganzzahligen Werte außer Null durchläuft. Man gewinnt diese Formel aus der Gleichung (7), indem man dieser die Gestalt

$$\sin \pi x = \pi x \prod_1^{\infty}{}_r \left\{\left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{\frac{x}{r}} \cdot \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-\frac{x}{r}}\right\}$$

verleiht und beachtet, daß die beiden Produkte

$$\prod_1^{\infty}{}_r \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{\frac{x}{r}} \quad \text{und} \quad \prod_1^{\infty}{}_r \left(1 + \frac{x}{r}\right) e^{-\frac{x}{r}} = \prod_{-1}^{-\infty}{}_r \left(1 - \frac{x}{r}\right) e^{\frac{x}{r}}$$

für jeden endlichen Wert von x unbedingt konvergieren. (Vgl. Übung 16.)

10. Die Entwicklung der Funktionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ in Partialbrüche.[1])

Setzt man in (7) anstatt x $x + a$, so erhält man

$$\sin(x+a) = (x+a)\prod_1^\infty{}' \frac{r^2\pi^2 - x^2 - 2xa - a^2}{r^2\pi^2}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch (7), so ergibt sich die für jeden Wert von a und x außer

$$x = r\pi \quad (r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

geltende Formel

$$\cos a + \cot x \sin a = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\prod_1^\infty{}' \left(1 - \frac{2xa + a^2}{r^2\pi^2 - x^2}\right). \qquad (10)$$

Das Produkt rechts kann nach dem 1. Satze in Nr. 6 in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von a entwickelt werden. Ist nämlich s eine solche natürliche Zahl, daß

$$s\pi > |x| = X$$

ist, so hat man für

$$r > s \qquad |r^2\pi^2 - x^2| > r^2\pi^2 - X^2$$

$$\frac{2XA + A^2}{|r^2\pi^2 - x^2|} < \frac{2XA + A^2}{r^2\pi^2 - X^2},$$

worin $A = |a|$ ist. Daraus folgt unmittelbar, daß die unendliche Reihe

$$\sum_s^\infty{}' \frac{2XA + A^2}{|r^2\pi^2 - x^2|}$$

konvergiert.

Entwickelt man nun in (10) die linke und rechte Seite nach Potenzen von a und setzt die Koeffizienten von a auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die für jeden Wert von x außer $x = r\pi$ gültige Formel

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_1^\infty{}' \frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2}. \qquad (11)$$

$\cot x$ ist eine eindeutige Funktion von x, welche in allen eigentlichen Punkten außer $x = n\pi$, wo n jede ganze Zahl sein kann, holomorph

---

1) Euler, Introductio I. § 171f. Dort sind jedoch bedingt konvergente Produkte benutzt, wodurch die Resultate unsicher werden. Andere elementare Methoden, die Partialbruchentwicklung von $\cot x$ usw. herzustellen, sind von Schröter [Schömilchs Zeitschrift 13 (1868), S. 254] und von Thomae (a. a. O. S. 90) gegeben worden. — Das wahre Wesen der Partialbruchzerlegung der eindeutigen analytischen Funktionen ist erst von Mittag-Leffler und Weierstraß erkannt worden (vgl. des ersteren Noten in den C. R. 1882).

ist. (Über das Verhalten dieser Funktion in der Umgebung ihrer Pole vgl. die folgende Nummer.)

Da nun

$$-\frac{2x}{r^2\pi^2-x^2}=\frac{1}{x-r\pi}+\frac{1}{x+r\pi}$$

ist, so daß in (11) die Glieder mit negativen Exponenten in der Entwicklung der $\cot x$ in der Umgebung eines jeden ihrer Pole erscheinen, so bezeichnet man die Formel (11) als die Zerlegung von $\cot x$ in Partialbrüche. Bringt man (11) in die Form

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_1^\infty{}^r\left\{\frac{1}{x-r\pi}+\frac{1}{x+r\pi}\right\},$$

läßt die Klammern weg, wodurch sich die Gleichung

$$\cot x=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\pi}+\frac{1}{x+\pi}+\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x+2\pi}+\cdots \tag{12}$$

ergibt, und setzt statt x $\frac{1}{2}\pi-x$, so erhält man die Zerlegung von $\tan x$ in Partialbrüche, d. i. die Formel

$$\begin{aligned}\tan x&=-\frac{2}{2x-\pi}-\frac{2}{2x+\pi}-\frac{2}{2x-3\pi}-\frac{2}{2x+3\pi}-\cdots\\&=\sum_1^\infty{}^r\frac{8x}{(2r-1)^2\pi^2-4x^2},\end{aligned} \tag{13}$$

welche für alle Werte von x außer denen von der Form $x=\frac{1}{2}(2r-1)\pi$ gilt.

Mittels der Formel

$$\cot\tfrac{1}{2}x+\tan\tfrac{1}{2}x=\frac{2}{\sin x} \tag{14}$$

findet man aus (12) und (13) die für alle Werte von x außer $x=r\pi$ geltende Gleichung

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}x=\frac{1}{\sin x}&=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\pi}-\frac{1}{x+\pi}+\frac{1}{x-2\pi}+\frac{1}{x+2\pi}-\cdots\\&=\frac{1}{x}+\sum_1^\infty{}^r(-1)^{r-1}\frac{2x}{r^2\pi^2-x^2}.\end{aligned} \tag{15}$$

Setzt man hier statt x $\frac{1}{2}\pi-x$, so folgt

$$\begin{aligned}\sec x=\frac{1}{\cos x}&=-\frac{2}{2x-\pi}+\frac{2}{2x+\pi}+\frac{2}{2x-3\pi}\\&\qquad-\frac{2}{2x+3\pi}-\frac{2}{2x-5\pi}+\cdots\\&=\sum_1^\infty{}^r(-1)^{r-1}\frac{4(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2-4x^2}.\end{aligned} \tag{16}$$

Die Formeln (12), (13), (15), (16) lassen unmittelbar die Periodizität der bezüglichen Funktionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ erkennen. So zeigt z. B. die Formel (12), daß $\cot(x+\pi) = \cot x$ ist, usw.

Die Reihen in (11), (13), (15), (16) haben die Eigentümlichkeit, daß, wenn eine positive Zahl C beliebig vorgelegt wird, sie für alle Werte von x, deren absoluter Betrag C nicht übersteigt, mit Ausschluß der Pole der bezüglichen Funktionen oder, was dasselbe besagt, nach Entfernung jener Glieder aus ihnen, welche in diesen Polen unendlich sind, für alle x, wofür $|x| \leqq C$ ist, gleichmäßig konvergieren. Mit Bezugnahme auf die Reihe in (11) hat man nämlich, wenn nur n so gewählt wird, daß $(n+1)\pi > C$ ist, für $|x| \leqq C$

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - x^2}\right| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - |x|^2} \leqq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2\pi^2 - C^2},$$

woraus die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe ersichtlich ist, und in derselben Weise läßt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihen in (13) und (15) nachweisen. Bezüglich der Reihe in (16) siehe Übung 17). Außerdem sind die Reihen mit in x quadratischen Nennern in (11), (13), (15) für jeden endlichen Wert von x mit Ausschluß der genannten Pole absolut konvergent, was man im Hinblicke auf das erste Beispiel S. 261 und den Satz S. 244 sofort erkennt.

11. Die ganzen Potenzreihen für die Funktionen $x\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$.

Wir sind nunmehr imstande, die Entwicklung der Funktion $x\cot x$ in eine Reihe nach Potenzen von x auf zwei Wegen herzustellen. Zunächst zeigt uns die Definition der Funktion

$$x\cot x = x\sin x : \cos x$$

nach V. 17, daß sie eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x liefert, deren Konvergenzkreis den Radius π hat. Um die Koeffizienten derselben zu ermitteln, geht man bequemer von der Funktion $\frac{1}{2}x\cot\frac{1}{2}x$ aus. Es sei also

$$\tfrac{1}{2}x\cot\tfrac{1}{2}x = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \cdots + k_nx^n + \cdots. \qquad (a)$$

Da

$$\cot\tfrac{1}{2}x = i\frac{e^{\frac{1}{2}xi} + e^{-\frac{1}{2}xi}}{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}} = i\frac{e^{xi}+1}{e^{xi}-1} = i + \frac{2i}{e^{xi}-1},$$

also

$$\tfrac{1}{2}x\,(\cot\tfrac{1}{2}x - i)\,(e^{xi} - 1) = xi$$

und daher für $|x| < \pi$

$$\left\{k_0 + \left(k_1 - \frac{i}{2}\right)x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \cdots\right\} \cdot \left\{1 + \frac{xi}{2!} + \frac{(xi)^2}{3!} + \cdots\right\} = 1$$

ist, so erhalten wir zunächst $k_0 = 1$ und $k_1 = 0$. Infolgedessen findet man, indem man den Koeffizenten einer jeden Potenz $x^h\,(h > 0)$ auf der linken Seite der letzten Gleichung gleich Null setzt, für $h \geqq 2$

$$1 - \frac{h+1}{2} + \sum_2^h i^{3r} \binom{h+1}{r} r!\, k_r = 0, \qquad \text{(b)}$$

woraus sich die Zahlen $k_r\,(r = 2, 3, \cdots)$ eindeutig berechnen lassen. Setzt man hier

$$i^{3r} r!\, k_r = d_{r-1}, \qquad \text{(c)}$$

so gehen die Gleichungen (b) in die Rekursionsformeln (7) S. 165 über. Demnach sind die dort betrachteten Zahlen d_{r-1} mit den vorstehenden Ausdrücken (c) identisch. Weil nun

$$y \cot y = (-y) \cot (-y)$$

ist, so kommen in der Reihe auf der rechten Seite von (a) nur die Potenzen mit geraden Exponenten von x wirklich vor, d. h. es ist

$$k_{2s-1} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, \cdots)$$

und dieses Resultat müssen auch die Gleichungen (b) liefern. Somit ergibt sich aus (c)

$$d_{2s} = 0, \quad d_{2s-1} = (-1)^s (2s)!\, k_{2s}.$$

Umgekehrt hat man

$$k_{2s} = (-1)^s \frac{d_{2s-1}}{(2s)!},$$

also, wenn wie a. a. O.

$$d_{2s-1} = (-1)^{s-1} B_s$$

gesetzt wird,

$$k_{2s} = -\frac{B_s}{(2s)!},$$

worin $B_1, B_2, \ldots$ wie bisher die Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Demnach ergibt sich für alle Werte von x, wofür $|x| < \pi$ ist, die Entwicklung

$$x \cot x = 1 - \sum_1^\infty \frac{2^{2s} B_s}{(2s)!} x^{2s}. \qquad (17)$$

Die nämliche Potenzreihe erlangen wir aus der Gleichung (11), indem wir beide Seiten derselben mit x multiplizieren, hierauf in der Reihe rechts

$$\frac{1}{r^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{r^2\pi^2} + \frac{x^2}{r^4\pi^4} + \cdots + \frac{x^{2s-2}}{r^{2s}\pi^{2s}} + \cdots \quad (r = 1, 2, \cdots)$$

setzen, was für $x < \pi$ angeht, und sodann die Doppelreihe nach Potenzen von x ordnen[1]. Das ist auf Grund des Weierstraßschen Doppelreihensatzes S. 285 zulässig, indem die mit x multiplizierte Reihe in (11) gleichmäßig konvergiert für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als π ist.

Ist wie in VIII. 16 für $n \geqq 2$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r^n} = S_n,$$

so folgt demnach für $x < \pi$

$$x \cot x = 1 - \sum_1^\infty \frac{2}{\pi^{2s}} S_{2s} x^{2s}. \tag{18}$$

Durch Vergleichung der hier erscheinenden Koeffizienten mit denen in (17) gelangen wir zur Formel

$$B_s = \frac{(2s)!}{2^{2s-1}\pi^{2s}} S_{2s} \qquad (s \geqq 1). \tag{19}$$

Hieraus erkennt man zunächst, daß die Zahlen B_s positiv sind. Daß sie rational sind, ergibt sich aus ihrer Einführung S. 165 unmittelbar. Daher schließen wir aus der Formel (19), daß $S_{2s} : \pi^{2s}$ eine rationale Zahl ist. Und zwar finden wir

$$S_{2s} = \frac{2^{2s-1} B_s}{(2s)!} \pi^{2s} \text{ d. i. } S_2 = \frac{\pi^2}{6},\ S_4 = \frac{\pi^4}{90} \text{ usw.}$$

Es ist aus (18) ersichtlich, daß die Glieder der $x \cot x$-Reihe für die Werte von x, deren absoluter Betrag π ist, dem absoluten Betrage nach zwischen 2 und $2S_2$ liegen. Daraus erkennt man zunächst wieder, daß die genannte Reihe für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als π ist, konvergiert (V. 2), und ferner, daß sie schon für alle Werte des absoluten Betrages π divergiert.

Zufolge (17) hat man für alle Werte von x, wofür $0 < |x| < \pi$ ist,

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2B_1 x - \frac{2}{3} B_2 x^3 - \cdots.$$

Daraus folgt, vermöge der Relation $\cot x = \cot(x - n\pi)$, für alle Werte von x, wofür $0 < |x - n\pi| < \pi$ ist,

$$\cot x = \frac{1}{x - n\pi} - 2B_1(x - n\pi) - \frac{2}{3} B_2 (x - n\pi)^3 - \cdots.$$

Mittels der Formel

$$\cot \tfrac{1}{2}x - \tan \tfrac{1}{2}x = 2 \cot x$$

1) Euler a. a. O. § 198; Institutiones calculi differentialis II. § 124.

d. i.

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$$

ergibt sich aus (17) die Potenzreihe für die Tangente

$$\tan x = \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2s}(2^{2s}-1)}{(2s)!} B_s x^{2s-1}. \tag{20}$$

Aus (17) und (20) folgt mit Hilfe von (14) die Kosekantenreihe

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2(2^{2s-1}-1)}{(2s)!} B_s x^{2s-1}. \tag{21}$$

Der Konvergenzkreis der Potenzreihe (20) hat den Radius $\frac{\pi}{2}$, der von (21) den Radius π, wie man mittels der Formel (19) auch aus den Koeffizienten derselben erkennt. Auf diesem Wege findet man ferner, daß jede in allen Punkten ihres Konvergenzkreises divergiert.

12. Einiges über die Bernoullischen Zahlen.

Aus der Formel (19) lassen sich zwei Eigenschaften dieser Zahlen entnehmen. 1) Die Bernoullischen Zahlen B_s sind positiv. 2) Sie wachsen vom Werte $s = 3$ an mit dem Index s beständig und ins Unendliche. Nach (19) ist nämlich

$$\frac{B_{s+1}}{B_s} = \frac{(2s+1)(s+1)}{2\pi^2} \frac{S_{2s+2}}{S_{2s}}. \tag{22}$$

Nun ist, vermöge der S. 386 bewiesenen Ungleichung

$$0 < S_n - 1 < 1 : (n-1),$$

$$\lim_{n=+\infty} S_n = 1,$$

also

$$\lim_{s=+\infty} \frac{B_{s+1}}{B_s} = +\infty,$$

woraus der zweite Satz nach „Arithmetik“ S. 236 sofort folgt. Nur ist noch zu bestimmen, von welchem Werte von s an die B_s wachsen. Da

$$S_{2s+2} > 1, \qquad S_{2s} \leqq S_2 = \frac{1}{6}\pi^2$$

ist, so ergibt sich aus (22) für $s \geqq 4$

$$B_{s+1} : B_s > 3(2s+1)(s+1) : \pi^4 > 1.$$

Aus den Werten

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30}$$

entnimmt man noch, daß zwar $B_1 > B_2 > B_3$, jedoch schon $B_3 < B_4$ ist.

Mit Hilfe der Gleichung (20) gelangt man zu einer weiteren Eigenschaft der Zahlen B_s.

3) Die positiven Zahlen

$$\frac{1}{s}\,2^{2s-1}(2^{2s}-1)\,B_s = T_s,\quad (s = 1, 2, \cdots),$$

welche Tangentenkoeffizienten heißen, sind ganz und wachsen mit dem Index s beständig. — Mit Benutzung der Koeffizienten T_s nimmt die Formel (20) die Gestalt

$$\tan x = \sum_1^\infty \frac{T_s}{(2s-1)!}\,x^{2s-1}$$

an. Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit der Reihe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

so muß links die Sinusreihe erscheinen. Vergleicht man die Koeffizienten von x^{2s-1} auf beiden Seiten der so erhaltenen Gleichung, so findet man die Relation

$$(-1)^{s-1} = T_s - \binom{2s-1}{2}\,T_{s-1} + \binom{2s-1}{4}\,T_{s-2} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{2s-1}{2s-2}\,T_1,$$

woraus erhellt, daß neben $T_1 = 1$ auch $T_2, T_3, \ldots T_s, \ldots$ ganze Zahlen sind. Man hat

$$T_2 = 2,\quad T_3 = 16,\quad T_4 = 272,\quad T_5 = 7936 \text{ usw.}$$

Stern hat gezeigt[1]), daß von T_2 an die Tangentenkoeffizienten abwechselnd mit den Ziffern 2 oder 6 schließen.

4) Setzt man in der Gleichung (20) $x = \frac{1}{2}yi$, so ergibt sich

$$\frac{1}{e^y+1} = \frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^s(2^{2s}-1)}{(2s)!}\,B_s\,y^{2s-1} \qquad (|y| < \pi).$$

---

1) Stern, Journal f. Math. 88 (1880), S. 85. — Von T_2 an sind alle Tangentenkoeffizienten durch 16 teilbar (vgl. Übung 18). Übrigens sind, wie Catalan (C. R. 58, p. 1105) gezeigt hat, schon die Zahlen

$$2\,(2^{2s}-1)B_s$$

ganz und zwar ungerade.

Durch die nämliche Substitution in (17) erhält man die Entwicklung

$$\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}+\sum_1^\infty(-1)^{s-1}\frac{B_s}{(2s)!}y^{2s-1}. \qquad (|y|<2\pi).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der folgenden

$$e^{xy}-1=xy+\frac{x^2y^2}{2!}+\frac{x^3y^3}{3!}+\cdots$$

und zieht vom Produkte 1 ab, so erhält man zufolge IV. 12

$$\frac{e^{xy}-1}{e^y-1}-1=\sum_0^\infty\frac{\varphi_{n+1}(x)}{(n+1)!}y^n,$$

wo $\varphi_{n+1}(x)$ die Bernoullische Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet. Die Funktion $(e^{xy}-1):(e^y-1)-1$ ist die erzeugende Funktion für die $\varphi_{n+1}(x)$.

5) Eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen, wodurch auch ihr Auftreten in den Koeffizienten der Potenzreihe (17) für $x\cot x$ erklärt wird, hat L. Seidel entdeckt. Vgl. Sitzungsberichte der Münchn. Akad., math.-naturw. Kl. 1877, p. 157.

13. Die ganze Potenzreihe für sec x. Eulersche Zahlen.

Die Funktion $\sec x=1:\cos x$ liefert eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x, welche nach V. 17 genau innerhalb des Kreises $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvergiert. Da

$$\sec(-x)=\sec x$$

ist, so kommen in der Sekantenreihe nur gerade Potenzen vor. Setzen wir demnach

$$\sec x=b_0+b_1x^2+b_2x^4+\cdots$$

und multiplizieren mit

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,$$

wodurch links 1 erhalten wird, so gelangen wir zu den folgenden Gleichungen für die b_s

$$b_0=1,\quad 0=b_s+\sum_1^s(-1)^r\frac{b_{s-r}}{(2r)!} \qquad (s=1,2,\cdots).$$

Wird hier

$$b_s=E_s:(2s)!$$

gesetzt, so folgt nach Multiplikation mit $(2s)!$

$$0=\sum_0^{s-1}(-1)^r\binom{2s}{2r}E_{s-r}+(-1)^s,$$

woraus ersichtlich ist, daß die Eulerschen Zahlen E_s ganze Zahlen sind. Man findet

$$E_1 = 1,\ E_2 = 5,\ E_3 = 61,\ E_4 = 1385,\ E_5 = 50521 \text{ usw.}$$

Die Eulerschen Zahlen schließen abwechselnd mit den Ziffern 1 und 5.[1])

Die Reihenentwicklung

$$\sec x = 1 + \sum_1^\infty \frac{E_s x^{2s}}{(2s)!} \qquad (|x| < \tfrac{1}{2}\pi) \tag{23}$$

läßt sich auch aus der Partialbruchentwicklung der Sekante ableiten. Setzt man in (16)

$$\frac{(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2} = \frac{1}{(2r-1)\pi} + \frac{2^2x^2}{(2r-1)^3\pi^3} + \frac{2^4x^4}{(2r-1)^5\pi^5} + \cdots,$$

so darf man die Doppelreihe nach Potenzen von x ordnen, wenn nur $|x|$ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ angenommen wird. Durch Vergleichung der Koeffizienten der so erhaltenen Potenzreihe für $\sec x$ mit denen in (23) ergeben sich die Formeln

$$\frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{r-1}}{2r-1} = 1,$$

$$\frac{2^{2s+2}}{\pi^{2s+1}}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{2s+1}} = \frac{E_s}{(2s)!}, \qquad (s \geqq 1), \tag{24}$$

wovon die erste schon in VIII. 11 bemerkt ist. Sie dienen einerseits zur Berechnung der Summen der Reihen

$$S'_{2s-1} = 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} - \cdots, \qquad (s \geqq 1),$$

andererseits zum Beweise des Satzes, daß die Eulerschen Zahlen positiv sind und mit dem Index beständig wachsen. Das letztere folgt unmittelbar durch Betrachtung des Quotienten $E_{s+1} : E_s$, indem S'_{2s+1} mit s beständig wächst zufolge der Ungleichungen

$$S'_{2s+1} > 1 - \frac{1}{3^{2s+1}} > 1 - \frac{1}{3^{2s-1}} + \frac{1}{5^{2s-1}} > S'_{2s-1}.$$

Da die Glieder

$$b_s\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2s} = \frac{4}{\pi}S'_{2s+1}$$

zwischen 1 und $\frac{4}{\pi}$ liegen, so erkennt man, daß der Konvergenzkreis

1) Über diese und andere Eigenschaften der Eulerschen Zahlen vgl. Stern, Journal für Math. 79 (1875), S. 67. — Siehe auch die Übungen 20) und 21).

der Reihe (23) in der Tat den Radius $\frac{1}{2}\pi$ hat und daß sie in allen Punkten desselben divergiert.

14. Die ganzen Potenzreihen für $l \sin x$ und $l \cos x$.[1])

Mit Hilfe des zweiten Satzes in Nr. 5 (Gleichung (5) S. 417) leitet man aus (7) und (9) (S. 442) die Formeln

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{s} S_{2s}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2s} - 2k\pi i, \tag{a}$$

$$l \cos x = -\sum_1^\infty \frac{1}{s} S''_{2s}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2s} - 2k'\pi i \tag{b}$$

ab, worin

$$S''_s = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

ist und k, sowie k' eine ganze Zahl bedeutet, die möglicherweise von x abhängen kann. Zufolge des erwähnten Satzes konvergiert die Potenzreihe in (a) sicher für alle Werte von x, deren Betrag kleiner als π, jene in (b) für alle, deren Betrag kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

Beschränkt man x auf die genannten Bereiche so darf man, wie jetzt gezeigt werden soll, $k = 0$ und $k' = 0$ setzen. Dabei werden wir zugleich sehen, daß π und $\frac{\pi}{2}$ die wahren Konvergenzradien der Reihen in (a), bezw. in (b) sind, so daß die Gleichungen (a), (b) überhaupt nur für die Werte von x, deren Betrag kleiner als π, bezw. $\frac{\pi}{2}$ ist, bestehen können.

Die Gleichung

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{s} S_{2s}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2s} \tag{a'}$$

gilt zunächst sicher für alle reellen und alle rein imaginären Werte von x, deren Betrag kleiner als π ist; denn für alle diese Werte ist $\frac{\sin x}{x}$ reell und positiv, also $l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ebenso wie die rechte Seite von (a') reell, während alle übrigen Werte von $L\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ komplex sind. Hieraus folgt sofort, daß π der wahre Konvergenzradius der Reihe in (a') ist; denn man hat bei Beschränkung des x auf reelle Werte

$$\lim_{x=\pi-0} l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\infty$$

und denselben Grenzwert muß beim nämlichen Grenzübergange auch die Reihe auf der rechten Seite von (a') haben. Demnach divergiert

1) Euler, Introductio I. § 191 f.

dieselbe für $x = \pi$ und ebenso für $x = -\pi$. Weiter können wir daraus schließen, daß die Gleichung (a') für alle x, wofür $|x| < \pi$ ist, gültig bleiben muß, wenn nur $l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ für die nämlichen Werte von x stetig ist. Um zu erkennen, daß das letztere der Fall ist, braucht man nach VIII. 7* nur zu zeigen, daß $\frac{\sin x}{x}$ für die genannten Werte von x nirgends reell und negativ wird. Angenommen nun, es sei für einen bestimmten Wert $x = \xi + \eta i$

$$\frac{\sin x}{x} = -\lambda,$$

wobei λ eine positive Zahl bedeutet, dann müßte, da

$$\sin(\xi + \eta i) = \sin\xi \cos\text{h.}\eta + i \cos\xi \sin\text{h.}\eta$$

ist (vgl. S. 391 Übung 2)),

$$\sin\xi \cos\text{h.}\eta = -\lambda\xi, \quad \text{also} \quad \frac{\sin\xi}{\xi} = -\lambda : \cos\text{h.}\eta$$

sein. Dies ist jedoch wegen

$$\frac{\sin\xi}{\xi} > 0 \; (|\xi| < \pi), \quad \cos\text{h.}\eta > 0$$

nicht möglich. Daraus folgt, daß $\frac{\sin x}{x}$ nirgends reell und negativ ist, und somit gilt die Gleichung (a') für alle x, wofür $|x| < \pi$ ist.

In ähnlicher Weise wird die Gleichung

$$l\cos x = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{s} S''_{2s} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2s} \tag{b'}$$

bestätigt und für die dortige Reihe der Konvergenzradius $\frac{\pi}{2}$ nachgewiesen. Da $\cos x$ für alle reellen und alle rein imaginären Werte von x, wofür $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist, reell und positiv ist, so gilt die Gleichung (b') zunächst für diese Werte, und da bei reellen Werten von x

$$\lim_{x = \frac{\pi}{2} - 0} l\cos x = -\infty$$

ist, so muß die Reihe rechts von (b') für $x = \pm\frac{\pi}{2}$ divergieren, so daß $\frac{\pi}{2}$ ihr wahrer Konvergenzradius ist. Ferner hat man

$$\cos(\xi + \eta i) = \cos\xi \cos\text{h.}\eta - i \sin\xi \sin\text{h.}\eta,$$

woraus man unmittelbar erkennt, daß $\cos x$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$ niemals reell und negativ wird.

Die Koeffizienten in den beiden Reihen (a') und (b') sind rationale Zahlen. Zufolge (19) hat man zunächst nach (a')

$$l\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2s-1} B_s}{(2s)!\, s} x^{2s}. \tag{25}$$

Zerlegt man S_{2s} in die Summe der Glieder mit ungeradem und die der Glieder mit geradem Nenner, so findet man

$$S''_{2s} + \frac{1}{2^{2s}} S_{2s} = S_{2s}$$

$$S''_{2s} = \frac{2^{2s}-1}{2^{2s}} S_{2s} = \frac{(2^{2s}-1)B_s}{(2s)!\,2}\pi^{2s} = \frac{T_s}{2^{2s+1}(2s-1)!}\pi^{2s}. \tag{26}$$

Damit ergibt sich die Formel

$$l\cos x = -\sum_1^\infty{}_s \frac{(2^{2s}-1)\,2^{2s-1}B_s}{(2s)!\,s}x^{2s} = -\sum_1^\infty{}_s \frac{T_s}{(2s)!}x^{2s}. \tag{27}$$

Durch Subtraktion von (25) und (27) erhält man für $|x| < \frac{\pi}{2}$ die Entwicklung

$$l\left(\frac{\tan x}{x}\right) = \sum_1^\infty{}_s \frac{(2^{2s-1}-1)\,2^{2s}B_s}{(2s)!\,s}x^{2s}. \tag{28}$$

Daß auch hier auf der linken Seite der Hauptwert des Logarithmus zu stehen hat, ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie oben bei den Formeln (a′) und (b′).

Die Reihen (25), (27), (28) sind nach Multiplikation mit dem Modulus der gemeinen Logarithmen geeignet zur Berechnung von

$$\log\sin x \quad \text{und} \quad \log\cos x,$$

sowie der Hilfszahlen

$$S = \log\frac{\sin x}{x} + \log \text{arc } 1'',$$

$$T = \log\frac{\tan x}{x} + \log \text{arc } 1'',$$

welche in neueren Tafelwerken für kleine Werte von x aufgeführt werden.

Da $S_{2s} : s$ bei wachsendem s beständig abnimmt und bei $\lim s = +\infty$ den Grenzwert Null hat, so konvergiert die Potenzreihe (a′) also auch (25) nach dem Satze 3, c) in VI, 12 für alle Werte von x vom absoluten Betrage π mit Ausschluß der Werte $x = \pm\pi$. Für die genannten Werte besteht also auch die Gleichung (25). Auf ähnliche Weise zeigt man, daß die Formel (27) auch gilt für alle Werte x vom absoluten Betrage $\frac{\pi}{2}$ außer $x = \pm\frac{1}{2}\pi$. Daraus folgt dann von selbst das Nämliche bezüglich der Formel (28).

15. Die Funktionen $\cot x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ gestatten zufolge des Laurentschen Satzes (S. 327) auch Entwicklungen nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x. Das kann man mit Hilfe ihrer Partialbruchentwicklungen leicht nachweisen.

Setzen wir z. B. an Stelle von x die Werte $\pi : 2$, $\pi : 3$, $\pi : 4$, $\pi : 6$, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdots$$

Da nun die Reihe (3) wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz für alle die genannten Werte von x nach Potenzen von x ordnen (V 14), so ergibt sich, wenn

$$\tfrac{1}{2}\pi < x < \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, die Gleichung

$$\tan x = -\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{2s}}{z^{2s-1}x^{2s-1}} - \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2s-1}}{x^{2s}} x^{2s-1} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{2r-1^{2s}}.$$

Mit Hilfe der Formel (26) findet man für den Koeffizienten des allgemeinen Gliedes im zweiten Teile

$$\frac{z^{2s+1}}{x^{2s}} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^{2s}} = \frac{T_s}{(2s-1)!} - \frac{z^{2s+1}}{x^{2s}}.$$

Die vieldeutigen Funktionen L sin x, L cos x lassen sich mit Hilfe der Formeln (7) und (9) in ähnlicher Weise entwickeln, es tritt aber zu den ganzen Potenzen von x noch ein Glied mit L x.

Übungen zum IX. Abschnitt.

1) Man zeige, daß, wenn die Beziehungen (a) S. 401 bestehen, die unendliche Reihe $\sum_{0}^{\infty} lf_n$ und folglich nach dem 6. Satze in Nr. 2 auch das Produkt $\prod_{0}^{\infty} f_n$ konvergiert.

Anleitung. Man setze $1 - \frac{p_{n+r}}{p_n} = v$ und bemerke, daß, wenn $|v| < 1$ ist, die Beziehung $|l(1-v)| < |v| : \{1 - |v|\}$ stattfindet.

2) Umgekehrt: Wenn die Reihe Σlf_n konvergiert, so bestehen die Beziehungen (a) S. 401.

3) Ersetzt man in der Formel (a*) S. 403 n durch $n-1$ und läßt weiter

$$a_r = -A : b_{r+1} \qquad (r = 0, 1, \cdots n-1)$$

sein, so nimmt sie die bemerkenswerte Form

$$1-\frac{A}{b_1}+\frac{A(A-b_1)}{b_1 b_2}-\cdots+(-1)^n\frac{A(A\quad b_1)\cdots(A-b_{n-1})}{b_1 b_2\cdots b_n}$$
$$=(-1)^n\frac{(A-b_1)(A-b_2)\cdots(A-b_n)}{b_1 b_2\cdots b_n}$$

an — eine Formel, die in Nouv. Ann. de Math. 1859, p. 219 angegeben ist. Setzt man darin $b_r = r$ $(r = 1, 2, \cdots n)$, so geht sie in die Formel

$$1-\binom{A}{1}+\binom{A}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{A}{n}=(-1)^n\binom{A-1}{n}$$

über, d. i. in die Formel (15) S. 283, wenn in dieser $c_1 = -1-A$ gesetzt wird.

4) Es sei eine unbegrenzte Folge von reellen positiven Zahlen α_0, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n, \cdots$ vorgelegt. Setzt man dann

$$\prod_0^n{}_r(1+\alpha_r i)=\sigma_n+\tau_n i \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

so ist $\sigma_{n+1}=\sigma_n-\alpha_{n+1}\tau_n$, $\tau_{n+1}=\tau_n+\alpha_{n+1}\sigma_n$ und allgemein für $r \geqq 1$

$$\sigma_{n+r}-\sigma_n=-(\alpha_{n+1}\tau_n+\alpha_{n+2}\tau_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+r}\tau_{n+r-1}),$$
$$\tau_{n+r}-\tau_n=\alpha_{n+1}\sigma_n+\alpha_{n+2}\sigma_{n+1}+\cdots+\alpha_{n+r}\sigma_{n+r-1}.$$

Man zeige nun: „Wenn die unendliche Reihe $\Sigma\alpha_n$ divergiert, so kann weder σ_n noch τ_n von einer bestimmten Stelle des Zeigers n an beständig Null sein und es gibt keine Stelle, von welcher an auch nur die eine der beiden Veränderlichen σ_n und τ_n ihr Vorzeichen nicht mehr wechselt." (Vgl. A. Pringsheim, Math. Annalen 33, S. 136.)

Beweis indirekt. Die nämliche Aussage gilt auch dann noch, wenn die α_n sämtlich negativ sind.

5) „Das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty{}_n(1+\varepsilon\alpha_n i) \qquad (\alpha_n>0;\ \varepsilon=\pm 1)$$

konvergiert oder divergiert, je nachdem die unendliche Reihe $\Sigma\alpha_n$ konvergiert oder divergiert. — Setzt man

$$p_n=\prod_0^n{}_r(1+\varepsilon\alpha_r i),$$

so ist $\lim |p_n|$ bei $\lim n = +\infty$ eine endliche positive Zahl größer als 1 oder $+\infty$, je nachdem die unendliche Reihe $\Sigma\alpha_n^2$ konvergiert oder divergiert." (Pringsheim a. a. O. S. 138.)

Anleitung. Die Konvergenz des Produktes im Falle, daß $\Sigma\alpha_n$ konvergiert, folgt unmittelbar aus dem 2. Satze in Nr. 4. Für den Fall, daß $\Sigma\alpha_n$ divergiert, benütze man den Satz in der Übung 4).

6) „Das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty{}_n(1+\alpha_n+\varepsilon\beta_n i) \qquad (\alpha_n \geqq 0;\ \beta_n \geqq 0;\ \varepsilon = \pm 1)$$

konvergiert dann und nur dann, wenn die beiden unendlichen Reihen $\Sigma\alpha_n$ und $\Sigma\beta_n$ zugleich konvergent sind; sein Grenzwert ist im Falle der Konvergenz absolut genommen größer als 1, wenn nicht gerade alle α_n und β_n zugleich Null sind." (Nach Pringsheim a. a. O. S. 139.)

Anleitung. Man setze

$$\prod_0^n{}_r(1+\alpha_r+\varepsilon\beta_r i) = \prod_0^n{}_r(1+\alpha_r)\prod_0^n{}_r\left(1+\frac{\varepsilon\beta_r i}{1+\alpha_r}\right)$$

und beachte Übung 5).

7) „Das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty{}_n(1-\alpha_n+\varepsilon\beta_n i) \qquad (0 \leqq \alpha_n < 1;\ \beta_n \geqq 0;\ \varepsilon = \pm 1)$$

konvergiert zu einem von Null verschiedenen Grenzwerte dann und nur dann, wenn die beiden Reihen $\Sigma\alpha_n$ und $\Sigma\beta_n$ zugleich konvergent sind. Es divergiert sicher dann, wenn $\Sigma\alpha_n$ konvergent, dagegen $\Sigma\beta_n$ divergent ist, und es hat den Grenzwert Null sicher dann, wenn $\Sigma\alpha_n$ divergiert, jedoch die obere Unbestimmtheitsgrenze von α_n bei $\lim = +\infty$ kleiner als 1 ist und außerdem die Reihe $\Sigma\beta_n^2$ konvergiert."

Anleitung. Man setze

$$\prod_0^n{}_r(1-\alpha_r+\varepsilon\beta_r i) = \prod_0^n{}_r(1-\alpha_r)\prod_0^n{}_r\left(1+\frac{\varepsilon\beta_r i}{1-\alpha_r}\right)$$

und berücksichtige 4) und 5).

8) Man zeige lediglich mit Hilfe der vorstehenden Sätze 5) und 6) und des Satzes 1) S. 416, daß die absolute Konvergenz der unendlichen Reihe Σa_n zur unbedingten Konvergenz des unendlichen Produktes $\Pi(1+a_n)$ notwendig und hinreichend ist.

9) Es sei

$$\vartheta_n = \frac{1}{\left(\left[\frac{n}{4}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n}{4}\right]+2\right)}, \qquad \alpha_n = \tan\vartheta_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

worin $\left[\frac{n}{4}\right]$ die größte in $\frac{n}{4}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. Dann ist $0 < \alpha_n < 1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ und es konvergiert die unendliche Reihe $\Sigma\alpha_n$. Demnach ist das unendliche Produkt $\Pi(1+\alpha_n i)$ unbedingt konvergent und es besteht die Gleichung

$$\sum_0^\infty{}_n l(1+\alpha_n i) = l\prod_0^\infty{}_n(1+\alpha_n i) + 2\pi i.$$

Anleitung. Man bringe $1 + \alpha_n i$ in die trigonometrische Form und benütze die Formel (6) S. 412.

Wir haben hier ein Beispiel vor uns, welches zeigt, daß, wenn auch $|a_n| < 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist und das unendliche Produkt $\Pi(1 + a_n)$ konvergiert, $\Sigma l(1 + a_n)$ nicht der Hauptwert des natürlichen Logarithmus von $\Pi(1 + a_n)$ zu sein braucht. Vgl. die Formel (5) S. 417.

10) Die im 3. Satze in IX, 7 aufgestellte Bedingung, daß die unendliche Reihe (13) S. 429 im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiere, legt die Frage nahe, ob, wenn eine unendliche Reihe $\Sigma g_n(x)$ in einem bestimmten Bereiche $\mathfrak{B}$ der Veränderlichen x absolut und gleichmäßig konvergiert, dann nicht auch die aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe im nämlichen Bereiche gleichmäßig konvergieren müsse. Daß das letztere in der Tat nicht notwendig zutrifft, zeigt die unendliche Reihe

$$(1 - x) - x(1 - x) + x^2(1 - x) - \cdots + (-1)^n x^n (1 - x) + \cdots,$$

welche in dem reellen Bereiche $0 \leqq x \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert, während die aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildete Reihe in diesem Bereiche von x nicht gleichmäßig konvergiert. — Man weise diese Eigenschaften der genannten Reihe nach (vgl. S. 83).

11) Es sei

$$g_0(x) = 1 - x, \quad g_n(x) = (-x)^n(1 - x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man zeige, daß bei dieser Annahme das Produkt $\prod_0^\infty (1 + g_n(x))$ in dem reellen Bereiche $0 \leqq x \leqq 1$ absolut und gleichmäßig, dagegen $\prod_0^\infty (1 + |g_n(x)|)$ ungleichmäßig konvergiert. — Die unendlichen Produkte verhalten sich demnach hinsichtlich der gleichmäßigen Konvergenz analog wie die unendlichen Reihen (siehe die vorige Übung).

12) „Wenn für alle Werte von x im Bereiche $\mathfrak{B}$

$$|g_n(x)| < A_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist und die unendliche Reihe

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots$$

konvergiert, so konvergiert das unendliche Produkt $\prod_0^\infty (1 + g_n(x))$ gleichmäßig in dem genannten Bereiche“ (Tannery a. d. S. 428 Note 1) a. O.).

Der Satz folgt unmittelbar aus dem Arzelàschen Satze S. 431, kann aber auch leicht direkt bewiesen werden.

13) Der Satz 2) in IX, 3 zeigt, daß ein unendliches Produkt

$$\prod_0^\infty (1 + a_n) \tag{1}$$

auch dann, wenn die Reihe

$$\sum_0^\infty a_n \tag{2}$$

unbedingt divergiert, noch konvergieren kann; jedoch hat das Produkt in dem genannten Satze im letzteren Falle stets den Grenzwert Null. Andererseits ist aus IX, 4 bekannt, daß in diesem Falle das Produkt (1) sicher nicht unbedingt konvergiert. Es bleibt aber noch die Frage offen, ob bei unbedingter Divergenz der Reihe (2) das Produkt (1) nicht auch zu einem von Null verschiedenen Grenzwerte bedingt konvergieren könne. Daß dies in der Tat möglich ist, beweist das folgende Beispiel: Ist

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i, \quad \alpha_n = -1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}, \quad \beta_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

so divergiert die Reihe (2) unbedingt, während das Produkt (1) zu einem Grenzwerte von der Form $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$, worin ϑ eine bestimmte, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Zahl ist, bei der durch den Index n angezeigten Anordnung der Faktoren bedingt konvergiert. Bei derselben Anordnung der Glieder konvergiert daher auch die Reihe $\Sigma l(1 + a_n)$.

14) Es sei für $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i, \quad |\alpha_n| < 1, \quad p_n = \prod_0^n (1 + a_r),$$

und außerdem sei

$$\lim_{n=+\infty} a_n = 0;$$

dann bestehen die folgenden Sätze, in denen die Grenzwerte sich stets auf den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ beziehen:

a) „Wenn $\Sigma\beta_n^2$ divergiert, dagegen $\Sigma\alpha_n$ unbedingt konvergiert, so ist $\lim |p_n| = +\infty$."

b) „Das Nämliche gilt, falls $\Sigma\beta_n^2$ divergiert und $\Sigma\alpha_n$ unbedingt divergiert und den Grenzwert $+\infty$ hat."

c) „Wenn $\Sigma\beta_n^2$ konvergiert, dagegen $\Sigma\alpha_n$ unbedingt divergiert, so ist $\lim |p_n| = +\infty$ oder 0, je nachdem $\Sigma\alpha_n$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hat."

d) „Wenn $\Sigma\beta_n^2$ konvergiert, dagegen $\Sigma\beta_n$ unbedingt divergiert und $\Sigma\alpha_n$ unbedingt konvergiert, so hat $|p_n|$ einen endlichen positiven (d. i. von Null verschiedenen) Grenzwert, während p_n selbst keinen Grenzwert besitzt."

e) „Wenn $\Sigma\beta_n^2$ konvergiert, dagegen $\Sigma\beta_n$ unbedingt divergiert und $\Sigma\alpha_n$ bedingt konvergiert, so kann $p_n|$ jede positive Zahl, aber auch die Null und $+\infty$ zum Grenzwerte haben; ebenso kann $|p_n|$ bei $\lim n = +\infty$ auch zwei voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen besitzen. p_n selbst hat jedoch keinen Grenzwert, außer wenn $\lim |p_n| = 0$ ist, in welchem Falle selbstverständlich auch $\lim p_n = 0$ sein wird. — Das unendliche Produkt

$$\prod_0^\infty (1 + a_n)$$

hat also im allgemeinen keinen Grenzwert; jedoch können seine Faktoren

stets in eine solche Anordnung gebracht werden, daß das Produkt zur Null konvergiert."

Anleitung. Um die vorstehenden Sätze nachzuweisen, betrachte man das Produkt

$$|p_n|^2 = \prod_0^n (1 + 2\alpha_r + \alpha_r^2 + \beta_r^2),$$

dessen Verhalten bei $\lim n = +\infty$ nach IX, 3 von der Beschaffenheit der unendlichen Reihe

$$\sum_0^\infty (2\alpha_n + \alpha_n^2 + \beta_n^2) = \sum_0^\infty \{\alpha_n(2 + \alpha_n) + \beta_n^2\}$$

abhängt. Bei den Sätzen a), b) und c) reicht man hiermit aus. Dagegen bedarf man zum Beweise der Sätze d) und e) noch des ersten Satzes in IX, 4. Zu diesem Zwecke setze man

$$1 + \alpha_n + \beta_n i = \varrho_n(\cos \vartheta_n + i \sin \vartheta_n)$$

und untersuche die Reihe $\Sigma \vartheta_n$, deren Verhalten sich aus jenem der Reihe $\Sigma \sin \vartheta_n$ erschließen läßt.

15) „Wenn die unendlichen Reihen Σa_n, $\Sigma a_n^2, \cdots, \Sigma a_n^{m-1}$ $(m \geqq 2)$ bedingt konvergieren, während Σa_n^m absolut konvergiert, so konvergiert die Reihe

$$\sum_0^\infty \left\{a_n x - \tfrac{1}{2}(a_n x)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1}(a_n x)^{m-1}\right\}$$

für jeden endlichen und von Null verschiedenen Wert von x nur bedingt und zwar sicher bei der hier vorgeschriebenen Anordnung ihrer Glieder." — Vgl. hierzu den Satz in IX, 8 und dessen Zusatz.

16) a) „Das unendliche Produkt $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{r}\right)e^{\frac{x}{r}}$ konvergiert unbedingt für jeden endlichen Wert von x und gleichmäßig für alle Werte von x, deren Betrag eine beliebig vorgelegte positive Zahl R nicht übersteigt." — Die unbedingte Konvergenz ergibt sich aus dem Satze 1) in IX, 6 auf Grund des Satzes a) in Übung 27) S. 395, die gleichmäßige Konvergenz aus dem 5. Satze in IX, 7.

Man kann anstatt der Formel (7) S. 442 schreiben:

$$\sin x = x \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{r\pi}\right)e^{\frac{x}{r\pi}} \prod_1 \left(1 + \frac{x}{r\pi}\right)e^{-\frac{x}{r\pi}}.$$

b) Auf ähnliche Art wird der Satz von Weierstraß (vgl. Werke II. S. 99; Thomae, Elem. Theorie d. analyt. Funktionen S. 98) bewiesen: „Vorgelegt seien unendlich viele komplexe Zahlen $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ so geordnet, daß ihr absoluter Betrag bei wachsendem n nicht abnimmt und dabei ins Unendliche wächst, also

$$\lim_{n=+\infty} |a_n| = +\infty$$

ist. Ferner soll es eine natürliche Zahl m geben, wofür die unendliche Reihe

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{a_n^m}$$

absolut konvergiert. Setzt man

$$\frac{x}{a_n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m-1}\left(\frac{x}{a_n}\right)^{m-1} = F_n(x),$$

so konvergiert das unendliche Produkt

$$\prod_1^\infty{}_n \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{F_n(x)}$$

für jeden Wert von x unbedingt und läßt sich für jeden in eine ganze Potenzreihe von x entwickeln. Es konvergiert gleichmäßig für alle x, deren Betrag die beliebig vorgelegte Zahl R nicht übersteigt."

17) Man zeige, daß die unendliche Reihe

$$\sec x = \sum_1^\infty{}_r (-1)^{r-1} \frac{4(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2}$$

(S. 445) für alle Werte von x, deren absoluter Betrag eine beliebig vorgelegte positive Zahl C nicht übersteigt, mit Ausschluß der Pole der Funktion $\sec x$ gleichmäßig konvergiert.

Anleitung. Man betrachte die Ausdrücke

$$R_{n,2p}(x) = \sum_{n+1}^{n+2p}{}_r (-1)^{r-1} \frac{4(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2}$$

und

$$R_{n,2p+1}(x) = R_{n,2p}(x) + (-1)^n \frac{4(2n+4p+1)\pi}{(2n+4p+1)^2\pi^2 - 4x^2}$$

unter der Voraussetzung, daß $(2n+1)\pi > 2C$ und $|x| \leqq C$ ist. Für den ersten Ausdruck findet man die Beziehungen

$$|R_{2m,2p}(x)| < 8\pi \sum_m^\infty{}_r \frac{(4r+1)(4r+3)\pi^2 + 4C^2}{\{(4r+1)^2\pi^2 - 4C^2\}\cdot\{(4r+3)^2\pi^2 - 4C^2\}},$$

$$|R_{2m-1,2p}(x)| < 8\pi \sum_m^\infty{}_r \frac{(4r-1)(4r+1)\pi^2 + 4C^2}{\{(4r-1)^2\pi^2 - 4C^2\}\cdot\{(4r+1)^2\pi^2 - 4C^2\}}.$$

18) Man zeige, daß die Tangentenkoeffizienten T_s (S. 450) von T_3 angefangen durch 16 teilbar sind. — Dies ergibt sich aus der Formel

$$T_s = \binom{2s-1}{2} T_{s-1} - \binom{2s-1}{4} T_{s-2} + \cdots + (-1)^s \binom{2s-1}{2s-2} T_1 + (-1)^{s+1} \quad (3)$$

durch den Schluß von $s-1$ auf s $(s > 3)$.

19) „Die Tangentenkoeffizienten ergeben, durch die Zahl 5 dividiert, abwechselnd die Reste 1 und 2, und zwar ist

$$T_{2s} \equiv 2 \pmod 5, \quad T_{2s-1} \equiv 1 \pmod 5.“$$

Da $T_1 = 1$ und $T_2 = 2$ ist, so folgt aus 18) und 19), daß die Tangentenkoeffizienten von T_2 an abwechselnd mit den Ziffern 2 und 6 schließen (vgl. S. 450).

Anleitung. Der Satz ergibt sich aus (3) durch zweimalige Anwendung des Schlusses von $s-1$ auf s, wobei das eine Mal $s = 2r$, das andere Mal $s = 2r+1$ zu setzen ist. Hierzu entwickle man die Potenzen

$$(1-1)^{4r-1}, \quad (1+1)^{4r-1}, \quad (1+2)^{4r-1}, \quad (1+3)^{4r-1},$$

beziehungsweise

$$(1-1)^{4r+1}, \quad (1+1)^{4r+1}, \quad (1+2)^{4r+1}, \quad (1+3)^{4r+1}$$

nach dem binomischen Satze und betrachte ihr Verhalten in bezug auf den Modul 5. Durch entsprechende Verwendung der so erhältlichen Kongruenzen findet man sodann die Beziehungen

$$\binom{4r-1}{4} + \binom{4r-1}{8} + \cdots + \binom{4r-1}{4r-4} \equiv 0 \pmod 5,$$

$$\binom{4r-1}{2} + \binom{4r-1}{6} + \cdots + \binom{4r-1}{4r-2} \equiv 3 \pmod 5,$$

$$\binom{4r+1}{4} + \binom{4r+1}{8} + \cdots + \binom{4r+1}{4r} \equiv 0 \pmod 5,$$

$$\binom{4r+1}{2} + \binom{4r+1}{6} + \cdots + \binom{4r+1}{4r-2} \equiv 0 \pmod 5,$$

mit deren Hilfe sich der Satz aus der Formel (3) sofort ergibt.

20) „Jede Eulersche Zahl ist von der Form $4n+1$.“ [Sylvester, C. R. 52 (1861), p. 212]. — Man findet dies aus der Formel (S. 451)

$$E_s = \binom{2s}{2} E_{s-1} - \binom{2s}{4} E_{s-2} + \cdots + (-1)^s \binom{2s}{2s-2} E_1 + (-1)^{s+1} \qquad (4)$$

durch den Schluß von $s-1$ auf s. Nimmt man an, daß der Satz für $E_1, E_2, \cdots E_{2r-1}, E_{2r}$ bewiesen sei, so findet man aus (4) direkt

$$E_{2r+1} \equiv 1 \pmod 4.$$

Für den Fall $s = 2r$ erhält man durch Entwicklung von $(1-1)^{4r}$ und $(1+1)^{4r}$ nach dem binomischen Satze leicht die Beziehung

$$2 + 2\binom{4r}{2} + 2\binom{4r}{4} + \cdots + 2\binom{4r}{2r-2} + \binom{4r}{2r} \equiv 0 \pmod 4,$$

welche im Vereine mit der Formel (4) zu dem gewünschten Resultate führt.

21) Man beweise, daß, je nachdem s gerade oder ungerade ist, die Eulersche Zahl E_s durch 5 teilbar ist oder aber bei der Division durch

5 den Rest 1 läßt. — Aus 20) und 21) folgt unmittelbar, daß die Eulerschen Zahlen abwechselnd mit den Ziffern 1 und 5 schließen. (Vgl. S. 452.)

Anleitung. Man verfahre ähnlich wie bei der Übung 19).

22) Man entwickle die folgenden Funktionen in Reihen nach ganzen positiven und negativen Potenzen von x und zwar

a) $\cot x$ für die Werte $\pi < x < 2\pi$,

b) $\operatorname{cosec} x$ für die nämlichen Werte von x,

c) $\sec x$ für die Werte $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

X. Abschnitt.

Die endlichen Kettenbrüche.

1. Kettenbrüche im engeren Sinne.

Es seien $2n+1$ beliebige reelle oder komplexe Zahlen $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots a_n, b_n$ vorgelegt, welche jedoch zunächst so gewählt sein sollen, daß von den Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} x_n = b_n, \quad x_{n-1} = b_{n-1} + \frac{a_n}{x_n}, \quad x_{n-2} = b_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}, \cdots \\ x_2 = b_2 + \frac{a_3}{x_3}, \qquad x_1 = b_1 + \frac{a_2}{x_2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

keiner verschwindet. Setzt man dann noch

$$K_n = b_0 + \frac{a_1}{x_1},$$

so stellt K_n ebenso wie jedes der Zeichen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ eine bestimmte Zahl dar. Für K_n ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (1) der Ausdruck

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}} \quad \text{oder eigentlich:} \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \dfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n}}} \quad (2)$$

Ein Ausdruck von dieser Form heißt ein Kettenbruch; b_0 ist sein Anfangsglied, a_r $(r = 1, 2, \cdots n)$ der r^{te} Teilzähler, b_r der r^{te} Teilnenner, $\frac{a_r}{b_r}$ der r^{te} Teilbruch oder das r^{te} Glied desselben. Die Zahlen $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_n, b_n$ heißen auch die Elemente des Kettenbruchs.

Anstatt der viel Raum beanspruchenden Schreibweise (2) bedient man sich auch gedrängterer Formen zur Darstellung des Kettenbruches (2). Wir schreiben statt (2)

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}, \quad (3)$$

worin der über das Zeichen + gesetzte Punkt andeuten soll, daß der aus allen folgenden Gliedern bestehende Teil des Kettenbruches zu dem unmittelbar vorhergehenden Teilnenner gehört.[1]) Wo es bequemer erscheint, werden wir dafür auch das von A. Pringsheim[2]) gebrauchte Symbol

$$\left[b_0; +\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \quad \text{oder kürzer} \quad \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$$

verwenden und in Fällen, wo die Glieder des Kettenbruches als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, wollen wir unter dem Zeichen K_n selbst den Kettenbruch verstehen.

Die Glieder eines Kettenbruches können anstatt durch das Zeichen + auch durch das Zeichen − miteinander verbunden sein, so daß derselbe dann in der Gestalt

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} - \cdots - \frac{a_n}{b_n}$$

erscheint; jedoch läßt sich ein solcher Kettenbruch, wie sich aus der obigen Erklärung von selbst versteht, stets auf die Form (3) bringen, indem man jedes zwei Glieder verknüpfende Zeichen — dem Zähler des ihm folgenden Gliedes vorsetzt und hierauf die betreffenden Glieder durch das Zeichen + miteinander verbindet.

Um den Kettenbruch (2) oder (3) zu berechnen, verwandelt man denselben in einen gewöhnlichen Quotienten. Zu diesem Zwecke nimmt man am einfachsten die folgenden Umformungen der Reihe nach vor:

$$b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1}b_n + a_n}{b_n},$$

$$b_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dot{+} \frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-2}b_{n-1}b_n + b_{n-2}a_n + b_n a_{n-1}}{b_{n-1}b_n + a_n}$$

. . . . . .

Diese Umwandlung der Kettenbrüche

$$K_{m,n} \equiv b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \dot{+} \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \quad (= x_m) \tag{4}$$

in einfache Quotienten denken wir uns nacheinander für $m = n-1$, $n-2, \cdots 2, 1, 0$ unter alleiniger Anwendung der beiden Regeln

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} \quad \text{und} \quad a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

---

1) Man schreibt anstatt (3) auch $b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$.

2) Encyklopädie I. Bd. S. 119.

vollzogen, so daß die dabei auftretenden Brüche weder durch Division noch durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl umgestaltet werden. Durch dieses Verfahren wird $K_{m,n}$ auf die Form eines einfachen Bruches gebracht, dessen Zähler und Nenner wir mit $Z_{m,n}$ und $N_{m,n}$ bezeichnen wollen. Es ist dann zufolge (4)

$$K_{m,n} = b_m + a_{m+1} : K_{m+1,n}, \tag{5}$$

also

$$\frac{Z_{m,n}}{N_{m,n}} = b_m + a_{m+1} : \frac{Z_{m+1,n}}{N_{m+1,n}} = \frac{b_m Z_{m+1,n} + a_{m+1} N_{m+1,n}}{Z_{m+1,n}} \quad (0 \leqq m \leqq n-2)$$

und hieraus ergeben sich gemäß der vorstehenden Bemerkung die Formeln

$$Z_{m,n} = b_m Z_{m+1,n} + a_{m+1} N_{m+1,n}, \qquad N_{m,n} = Z_{m+1,n}. \tag{6}$$

Demnach ist

$$Z_{m,n} = b_m Z_{m+1,n} + a_{m+1} Z_{m+2,n} \tag{7}$$

und

$$K_{m,n} = \frac{Z_{m,n}}{Z_{m+1,n}}. \tag{8}$$

Setzt man noch

$$Z_{n,n} = N_{n-1,n} = b_n, \quad Z_{n+1,n} = N_{n,n} = 1, \quad K_{n,n} = b_n, \tag{9}$$

so gelten die Formeln (7) und (8) auch für $m = n-1$ und die letztere außerdem noch für $m = n$. Nach der durch die Formel (4) festgesetzten Bedeutung des Zeichens $K_{m,n}$ kommt dem Kettenbruche (3) das Zeichen $K_{0,n}$ zu, welches somit mit K_n zusammenfällt. Es ist also zufolge (8)

$$K_n = K_{0,n} = \frac{Z_{0,n}}{Z_{1,n}}. \tag{10}$$

Die Zahl $Z_{0,n}$ heißt der Zähler, $Z_{1,n}$ der Nenner des Kettenbruches (3); der Quotient $\frac{Z_{0,n}}{Z_{1,n}}$ ist der Wert[1]) desselben. Durch schrittweise Berechnung der Zahlen $Z_{n-1,n}, Z_{n-2,n}, \cdots Z_{1,n}, Z_{0,n}$ mittels der Formel (7) gelangt man in der kürzesten Weise zur Kenntnis dieses Wertes. Die Rechnung, welche man dabei beispielsweise für den Kettenbruch

$$2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{1} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4} \tag{a}$$

anzustellen hat, ist aus dem Schema

---

1) Nach Stern, Theorie der Kettenbrüche (1834) S. 4, wird der Wert eines Kettenbruches auch als reduzierter Kettenbruch bezeichnet.

m	6	5	4	3	2	1	0
a_{m+1}			1	3	1	2	1
b_m		4	2	1	3	2	2
			$2\cdot4+1\cdot1$	$1\cdot9+3\cdot4$	$3\cdot21+1\cdot9$	$2\cdot72+2\cdot21$	$2\cdot186+1\cdot72$
$Z_{m,5}$	1	4	9	21	72	186	444

zu ersehen. Danach ist $\frac{444}{186} = 2\frac{12}{31}$ der Wert des Kettenbruches (a).

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf einen beliebig vorgelegten Kettenbruch (3) erfährt man auch, ob die Zahlen a_1, b_1, a_2, $b_2, \cdots a_n$, b_n den an die Ausdrücke (1) geknüpften Bedingungen entsprechen oder nicht. Wie nämlich bereits in der Formel (4) angedeutet wurde, ist $K_{m,n} = x_m$, sofern nur diese beiden Zeichen einen Sinn haben, d. h. wenn nur $|x_r > 0$ ist für $r = m+1,\ m+2, \cdots n$. Hat dabei x_m selbst den Wert Null, so auch $K_{m,n}$. Die genannten Bedingungen verlangen demnach, daß jedem der Kettenbrüche

$$K_{n,n},\ K_{n-1,n}, \cdots K_{2,n},\ K_{1,n}$$

ein von Null verschiedener Wert zukomme, und dies trifft gemäß der Gleichung (8) dann und nur dann zu, wenn die sämtlichen Zahlen

$$b_n,\ Z_{n-1,n},\ Z_{n-2,n}, \cdots Z_{2,n},\ Z_{1,n}$$

von Null verschieden sind.

Manchmal gebraucht man anstatt $Z_{m,n}$ und $N_{m,n}$ die Zähler $Z'_{m,n}$ und Nenner $N'_{m,n}$, welche sich ergeben, indem man die Kettenbrüche

$$R_{m,n} \equiv \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \quad (1 \leqq m \leqq n) \tag{11}$$

unter ausschließlicher Anwendung der beiden S. 466 angegebenen Regeln in die Gestalt gewöhnlicher Brüche überführt. Da unter der Voraussetzung, daß die obigen Bedingungen erfüllt sind,

$$R_{m,n} = a_m : K_{m,n} = a_m : \frac{Z_{m,n}}{N_{m,n}}$$

ist, so hat man dann

$$Z'_{m,n} = a_m N_{m,n} = a_m Z_{m+1,n}, \quad N'_{m,n} = Z_{m,n}. \tag{12}$$

2. Kettenbrüche im weiteren Sinne.

Nach der bisherigen Erklärung ist der Kettenbruch

$$K_n \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \tag{13}$$

rein arithmetisch aufzufassen als die Summe aus der Zahl b_0 und einem Quotienten, dessen Dividend a_1 ist, während der Divisor wieder als Summe aus einer Zahl b_1 und einem Quotienten erscheint usw. Der Kettenbruch hat daher keinen Sinn mehr, sobald von den Zahlen

$$b_n,\ Z_{n-1,n},\ Z_{n-2,n},\ \cdots\ Z_{2,n},\ Z_{1,n} \tag{14}$$

auch nur eine verschwindet. Denn versucht man ihn jetzt in der in Nr. 1 angegebenen Weise auf die Form eines einfachen Bruches zu bringen, so stößt man dabei, wie aus der Gleichung (8) ersichtlich ist, mindestens auf einen Quotienten, dessen Divisor Null ist und der also keinen Sinn hat. Ist nämlich $Z_{p,n} = 0$, wobei p eine der Zahlen 1, 2, 3, $\cdots n$ bedeutet, so ist nach (8) $K_{p-1,n}$ sinnlos und es verlieren in diesem Falle auch die durch die Zeichen $K_{p-2,n}$, $K_{p-3,n}$, $\cdots$ $K_{1,n}$, $K_{0,n}$ dargestellten Ausdrücke jede Bedeutung. Von dieser Art ist z. B. der Kettenbruch

$$3 + \tfrac{2}{7} + \tfrac{5}{2} \dot{-} \tfrac{1}{1} \dot{-} \tfrac{1}{2}. \tag{b}$$

In demselben ist $n = 4$ und man findet nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren der Reihe nach

$$Z_{4,4} = b_4 = 2, \quad Z_{3,4} = 1, \quad Z_{2,4} = 0, \quad Z_{1,4} = 5, \quad Z_{0,4} = 15.$$

Gerade dieses Beispiel zeigt aber, daß in einem Kettenbruche (13), in welchem für einen bestimmten Wert des Index p $(p > 1)$ $Z_{p,n} = 0$ ist, trotzdem $Z_{1,n}$ von Null verschieden ausfallen kann. Es hat dann zwar der Kettenbruch nach der bisherigen Auffassung desselben keine Bedeutung mehr, aber der Quotient $\frac{Z_{0,n}}{Z_{1,n}}$, welcher uns früher nach der Gleichung (10) den Wert des Kettenbruches angab, wird deshalb nicht sinnlos, sondern ist nach wie vor eine bestimmte Zahl.

Dieser Umstand gibt Anlaß zu einer namhaften Erweiterung des Kettenbruchbegriffes. Wir definieren nunmehr den Ausdruck

$$K_n \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n}$$

durch die Gleichungen

$$Z_{n,n} = b_n, \quad Z_{n+1,n} = 1,$$

$$Z_{m,n} = b_m Z_{m+1,n} + a_{m+1} Z_{m+2,n} \quad (m = n-1,\ n-2, \ldots 2, 1, 0) \tag{15}$$

und

$$K_n = \frac{Z_{0,n}}{Z_{1,n}}. \tag{16}$$

Eine solche Definition ist zulässig, da sie die frühere, engere Erklärung der Kettenbrüche in sich befaßt und gemäß derselben der Kettenbruch K_n in allen Fällen als die nämliche Funktion der ihn bestimmenden Größen $b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$ erscheint. Daß durch dieselbe eine wirkliche Erweiterung des Kettenbruchbegriffes erreicht wurde, bezeugt uns der Kettenbruch (b), welchen wir nach der früheren Erklärung als sinnlos bezeichnen mußten, während ihm jetzt ein Sinn zukommt.

Zufolge der Festsetzungen (15) und (16) hat nunmehr der Kettenbruch K_n stets einen Sinn, wenn nur $Z_{1,n}$ von Null verschieden ausfällt, und es ist $\frac{Z_{0,n}}{Z_{1,n}}$ sein Wert. Dabei sind nach dem Vorausgehenden zwei Fälle zu unterscheiden. Ist von den Zahlen (14) keine Null, so ist K_n ein Kettenbruch im engeren Sinne oder, wie wir ihn kürzer nennen wollen, ein eigentlicher Kettenbruch. Wenn dagegen von jenen Zahlen mindestens eine, jedoch nicht $Z_{1,n}$, verschwindet, so gewinnt der Kettenbruch K_n erst durch die erweiterte Definition eine Bedeutung; er möge dann ein uneigentlicher Kettenbruch heißen.

Falls aber $Z_{1,n} = 0$ ist, hat der Kettenbruch K_n nach Gleichung (16) keinen Sinn. Dieser Fall tritt beispielsweise immer dann ein, wenn von den Zahlen (14) zwei unmittelbar aufeinanderfolgende den Wert Null besitzen. Denn ist $Z_{p,n} = Z_{p+1,n} = 0$, so findet man aus (15)

$$Z_{p-1,n} = 0,\ Z_{p-2,n} = 0,\ \cdots,\ Z_{1,n} = 0,\ Z_{0,n} = 0$$

und die Gleichung (16) lautet daher $K_n = \frac{0}{0}$, sie ist also sinnlos. Ein solches Verhalten zeigt der Kettenbruch

$$2 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{0}{1} - \frac{1}{1};$$

daß in demselben der dritte Teilzähler verschwindet, ist nicht bloß ein Zufall. Soll nämlich $Z_{p,n} = Z_{p-1,n} = 0$ sein, während $Z_{p+1,n}$ von Null verschieden ist, so ist dies gemäß der Formel (15) nicht anders möglich, als indem $a_p = 0$ ist. (Vgl. hierüber Nr. 6.)

3. Die Näherungsbrüche.

Die folgenden Untersuchungen haben zunächst den Zweck, Zahlen zu gewinnen, die dem Werte des Kettenbruches (13) auf leicht zu beurteilende Weise sich nähern. Solche Zahlen bieten sich dar bei Betrachtung derjenigen Kettenbrüche

$$K_m \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} \qquad (0 \leq m \leq n), \tag{17}$$

welche aus dem Kettenbruche (13) durch Weglassung der letzten $n - m$ Glieder entstehen. Führt man noch die Bezeichnungen

$$Z_{0,m} = Z_m,\quad Z_{1,m} = N_{0,m} = N_m,\quad N_0 = 1 \tag{18}$$

ein, so sind nach Formel (16) die Quotienten

$$\frac{Z_0}{N_0},\ \frac{Z_1}{N_1},\ \frac{Z_2}{N_2},\ \cdots \frac{Z_n}{N_n} \tag{19}$$

die beziehungsweisen Werte der Kettenbrüche $K_0, K_1, K_2, \ldots K_n$, soweit dieselben einen Sinn haben. Der Quotient oder Bruch $\frac{Z_m}{N_m}$ heißt, wenn er möglich ist, d. h. wenn N_m nicht verschwindet, der m^{te} Näherungsbruch des Kettenbruches (13). Dementsprechend wird Z_m der m^{te} Näherungszähler, N_m der m^{te} Näherungsnenner genannt. Den Namen Näherungsbrüche verdanken die Quotienten (19) dem Umstande, daß der Ausdruck $\frac{Z_m}{N_m}$, während m von 0 bis n läuft, in gewissen Fällen, von denen später die Rede sein wird, dem Werte des Kettenbruches (13) sich beständig nähert. Der n^{te} Näherungsbruch ist der Wert des Kettenbruches (13) selbst.

In rein formalem Sinne kann man als Näherungsbruch von K_n jeden der Kettenbrüche (17) bezeichnen, ohne Rücksicht darauf, ob ihm ein bestimmter Wert zukommt oder nicht. Es vereinfacht sich dadurch manchmal die sprachliche Ausdrucksweise.

Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche (19) lassen sich mit Hilfe von Rekursionsformeln berechnen, die man aus den Definitionsgleichungen (15) gewinnt. Zufolge dieser Gleichungen ist nämlich

$$Z_{n,n} = b_n, \quad Z_{n-1,n-1} = b_{n-1}, \quad Z_{n-2,n-2} = b_{n-2},$$
$$Z_{n+1,n} = Z_{n,n-1} = Z_{n-1,n-2} = 1,$$

somit

$$Z_{n-1,n} = b_{n-1}b_n + a_n = a_n Z_{n-1,n-2} + b_n Z_{n-1,n-1}$$

und

$$\begin{aligned} Z_{n-2,n} &= b_{n-2}Z_{n-1,n} + a_{n-1}b_n = b_{n-2}(b_{n-1}b_n + a_n) + a_{n-1}b_n = \\ &= a_n b_{n-2} + b_n(b_{n-2}b_{n-1} + a_{n-1}) = \\ &= a_n Z_{n-2,n-2} + b_n(b_{n-2}Z_{n-1,n-1} + a_{n-1}Z_{n,n-1}) = \\ &= a_n Z_{n-2,n-2} + b_n Z_{n-2,n-1}. \end{aligned}$$

Es besteht also zunächst für $m = n - 1$ und $m = n - 2$ die Gleichung

$$Z_{m,n} = a_n Z_{m,n-2} + b_n Z_{m,n-1}; \tag{Ia}$$

dieselbe ist aber, wie sich durch den Schluß von m auf $m - 1$ dartun läßt, für alle Werte $m = n - 1, n - 2, \ldots, 3, 2, 1, 0$ gültig. Nach (15) ist nämlich

$$Z_{m-1,n} = b_{m-1}Z_{m,n} + a_m Z_{m+1,n}.$$

Denkt man sich nun hier den Wert des Zeigers m so gewählt, daß dafür die Gleichung (Ia) besteht und dieselbe auch noch gültig bleibt, wenn man darin m durch $m + 1$ ersetzt, was mindestens für $m = n - 2$ sicher zutrifft, so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung mit Rücksicht auf (Ia)

$$Z_{m-1,n} = b_{m-1}(a_n Z_{m,n-2} + b_n Z_{m,n-1}) + a_m(a_n Z_{m+1,n-2} + b_n Z_{m+1,n-1}) =$$
$$= a_n(b_{m-1} Z_{m,n-2} + a_m Z_{m+1,n-2}) + b_n(b_{m-1} Z_{m,n-1} + a_m Z_{m+1,n-1}).$$

Somit ist gemäß der Formel (15)

$$Z_{m-1,n} = a_n Z_{m-1,n-2} + b_n Z_{m-1,n-1},$$

d. h. die Gleichung (Ia) bleibt auch richtig, wenn man darin m durch $m-1$ ersetzt; folglich gilt dieselbe für alle Werte $m = n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$. Da nach der zweiten Gleichung (6), beziehungsweise nach den ersten beiden Gleichungen (9)

$$N_{m,n} = Z_{m+1,n} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots n)$$

ist, so kann der Formel (Ia) unmittelbar die Formel

$$N_{m,n} = a_n N_{m,n-2} + b_n N_{m,n-1} \tag{Ib}$$

zur Seite gestellt werden, welch letztere demnach für $m = 0, 1, 2, \ldots n-2$ gültig ist. Läßt man noch allgemein

$$N_{p+1,p} = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots n) \tag{20}$$

sein, so ist die Formel (Ib) auch für $m = n-1$ richtig, indem sie nun für diesen Wert von m in Übereinstimmung mit der ersten Festsetzung (9) $N_{n-1,n} = b_n$ ergibt.

Zunächst nimmt ein besonderer Fall der Formeln (Ia) und (Ib) unser Interesse in Anspruch. Aus ihnen fließen nämlich, indem man $m = 0$ nimmt und n durch p $(2 \leqq p \leqq n)$ ersetzt, unter Berücksichtigung der Festsetzungen (18) die beiden Formeln

$$Z_p = a_p Z_{p-2} + b_p Z_{p-1}, \quad N_p = a_p N_{p-2} + b_p N_{p-1}, \tag{II}$$

welche für $p = 2, 3, \ldots n$ gelten und zur rekurrenten Bildung der Zähler Z_p und Nenner N_p der Näherungsbrüche des Kettenbruches (13) dienen.[1]) Daß $Z_1 = a_1 + b_0 b_1$ und $N_1 = b_1$ ist, erkennt man durch den bloßen Anblick des Kettenbruches (13). Da außerdem $Z_0 = b_0$ und $N_0 = 1$ ist, so findet man mittels der Formeln (II) nacheinander

$$Z_2 = a_1 b_2 + a_2 b_0 + b_0 b_1 b_2$$
$$N_2 = a_2 + b_1 b_2$$
$$Z_3 = a_1 a_3 + a_1 b_2 b_3 + a_2 b_0 b_3 + a_3 b_0 b_1 + b_0 b_1 b_2 b_3$$
$$N_3 = a_2 b_3 + a_3 b_1 + b_1 b_2 b_3$$

usw. Auf diese Weise gelangt man schließlich zur Kenntnis des

1) Wallis, Opera mathematica I, S. 475; Euler, Introductio in Anal. inf. I. § 361. Die Formeln (II) gelten auch noch für $p = 1$, wenn man mit Euler der Folge der Näherungsbrüche den Ausdruck $\frac{1}{0}$ voransetzt, d. i. wenn man $Z_{-1} = 1$ und $N_{-1} = 0$ sein läßt.

Wertes $\frac{Z_n}{N_n}$. Auf Grund der Formeln (II) kann man also bei Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Quotienten auch von links nach rechts fortschreiten, während nach dem in Nr. 1 angegebenen Verfahren behufs derselben Umformung der umgekehrte Weg eingeschlagen wurde. Das dort gegebene Beispiel (a) erfordert nunmehr die folgenden Rechnungen:

p	0	1	2	3	4	5
a_p		1	2	1	3	1
b_p	2	2	3	1	2	4
			$\frac{2\cdot 2+3\cdot 5}{2\cdot 1+3\cdot 2}$	$\frac{1\cdot 5+1\cdot 19}{1\cdot 2+1\cdot 8}$	$\frac{3\cdot 19+2\cdot 24}{3\cdot 8+2\cdot 10}$	$\frac{1\cdot 24+4\cdot 105}{1\cdot 10+4\cdot 44}$
$\frac{Z_p}{N_p}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{105}{44}$	$\frac{444}{186}$

Dieses Verfahren liefert nacheinander alle Näherungsbrüche und schließlich den Wert des Kettenbruches selbst. Sollte dabei als letzter Nenner die Zahl Null erscheinen, so ist der Kettenbruch unmöglich oder sinnlos; ist dagegen dieser Nenner von Null verschieden, so hat der Kettenbruch stets einen Sinn und es läßt sich auch, wie wir in Nr. 6 zeigen werden, leicht entscheiden, ob derselbe ein eigentlicher oder uneigentlicher Kettenbruch ist.

Neben der durch die Gleichungen (II) gegebenen, rekurrenten Darstellung der Näherungszähler und Näherungsnenner möge hier noch die von S. Günther[1]) zuerst systematisch durchgeführte, independente Darstellung dieser Größen in Form von Determinanten Raum finden. Um zu derselben zu gelangen, kann man entweder mit Günther von den Gleichungen (II) oder aber von der Formel (7) S. 467 ausgehen.[2]) Wir wählen den letzteren, ein wenig kürzeren Weg. Die zuletzt genannte Formel liefert, indem man darin n durch p ersetzt, die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
-Z_{0,p}+b_0Z_{1,p}+a_1Z_{2,p}+\ 0\ +\ 0\ +\cdots+\ 0\ +\ 0\ =0\\
\ \ 0\ -\ Z_{1,p}\ +b_1Z_{2,p}+a_2Z_{3,p}+\ 0\ +\cdots+\ 0\ +\ 0\ =0\\
\ \ 0\ +\ 0\ -\ Z_{2,p}\ +b_2Z_{3,p}+a_3Z_{4,p}+\cdots+\ 0\ +\ 0\ =0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\ \ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\cdots-Z_{p-1,p}+b_{p-1}Z_{p,p}=-a_p\\
\ \ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\ 0\ +\cdots+\ 0\ -\ Z_{p,p}=-b_p.
\end{array}$$

1) S. Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form (1873), S. 32 u. d. f.

2) Vgl. K. Hattendorff, Algebraische Analysis (1877), S. 264.

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist, da die Elemente auf der unteren Seite der Hauptdiagonale sämtlich Null sind, das Produkt der Elemente dieser Diagonale, d. i. $(-1)^{p+1}$. Demnach hat man

$$Z_p = Z_{0,p} = \begin{vmatrix} b_0, & a_1, & 0, & 0, \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & b_1, & a_2, & 0, \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_2, & a_3, \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \cdots, & -1, & b_{p-1}, & a_p \\ 0, & 0, & 0, & 0, \cdots, & 0, & -1, & b_p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_0, & -1, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ a_1, & b_1, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_2, & b_2, & -1, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & a_{p-1}, & b_{p-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & a_p, & b_p \end{vmatrix}.$$

Um die dem Nenner N_p entsprechende Determinante zu erhalten, beachte man, daß $N_p = N_{0,p} = Z_{1,p}$ ist, woraus sich gemäß des soeben gewonnenen Resultates sofort

$$N_p = \begin{vmatrix} b_1, & -1, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & b_2, & -1, & 0, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_3, & b_3, & -1, & \cdots, & 0, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & a_{p-1}, & b_{p-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & a_p, & b_p \end{vmatrix}$$

ergibt. In diesen Formeln kann p jeden der Werte $1, 2, 3, \ldots n$ bedeuten. Die hier auftretenden Determinanten werden von Günther als Kettenbruchdeterminanten bezeichnet.[1])

4. Verallgemeinerung der in Nr. 3 aufgestellten Rekursionsformeln für die Näherungsbrüche.[2])

In der Formel (Ia) darf man offenbar den Zeiger n durch jede der Zahlen $2, 3, \ldots n-1, n$ ersetzen. Ist nun $3 \leqq p \leqq n$ und $m < p-1$, so hat man demnach

$$Z_{m,p} = a_p Z_{m,p-2} + b_p Z_{m,p-1} \quad \text{und} \quad Z_{m,p-1} = a_{p-1} Z_{m,p-3} + b_{p-1} Z_{m,p-2}.$$

1) Günther a. a. O. S. 34.

2) Nach Otto Stolz, vgl. Vorl. über allgem. Arithm. II. S. 268.

Schreibt man in der ersteren dieser Gleichungen an Stelle von $Z_{m,p-1}$ den ihm zufolge der letzteren zukommenden Ausdruck, so erhält man zunächst

$$Z_{m,p} = a_{p-1}b_pZ_{m,p-3} + (b_{p-1}b_p + a_p)Z_{m,p-2}.$$

Nun ist aber $b_p = Z_{p,p} = N_{p-1,p}$ und zufolge (15)

$$b_{p-1}b_p + a_p = Z_{p-1,p},$$

somit

$$Z_{m,p} = a_{p-1}N_{p-1,p}Z_{m,p-3} + Z_{p-1,p}Z_{m,p-2}. \tag{21}$$

Falls hier $p > 3$ und $m < p-2$ ist, kann man an Stelle von $Z_{m,p-2}$ wieder den hierfür aus (1a) sich ergebenden Ausdruck

$$a_{p-2}Z_{m,p-4} + b_{p-2}Z_{m,p-3}$$

substituieren. Man gewinnt dadurch die Gleichung

$$Z_{m,p} = a_{p-2}Z_{p-1,p}Z_{m,p-4} + (b_{p-2}Z_{p-1,p} + a_{p-1}N_{p-1,p})Z_{m,p-3},$$

aus der sich, da

$$Z_{p-1,p} = N_{p-2,p} \quad \text{und} \quad N_{p-1,p} = Z_{p,p}$$

ist, mit Hilfe von (15)

$$Z_{m,p} = a_{p-2}N_{p-2,p}Z_{m,p-4} + Z_{p-2,p}Z_{m,p-3} \tag{22}$$

ergibt. Die vorstehenden Ergebnisse (21) und (22) lassen erwarten, daß allgemein

$$Z_{m,p} = a_kN_{k,p}Z_{m,k-2} + Z_{k,p}Z_{m,k-1} \quad (m+1 \leqq k \leqq p \leqq n;\ k > 1) \tag{IIIa}$$

sein werde, was denn auch durch den Schluß von k auf $k-1$ leicht nachgewiesen werden kann. Nimmt man nämlich diese Formel für einen bestimmten Wert von k als richtig an, was für $k = p-1$ und $k = p-2$ schon feststeht, und setzt man nach (Ia)

$$Z_{m,k-1} = a_{k-1}Z_{m,k-3} + b_{k-1}Z_{m,k-2},$$

so findet man mittels der Formel (15) unter Berücksichtigung der Identitäten

$$Z_{k,p} = N_{k-1,p} \quad \text{und} \quad N_{k,p} = Z_{k+1,p},$$

daß in der Tat

$$Z_{m,p} = a_{k-1}N_{k-1,p}Z_{m,k-3} + Z_{k-1,p}Z_{m,k-2}$$

ist. Somit gilt die Formel (IIIa) allgemein für die dort angegebenen Werte von k.

Auf ähnliche Art gewinnt man aus (Ib) die Gleichung

$$N_{m,p} = a_kN_{k,p}N_{m,k-2} + Z_{k,p}N_{m,k-1} \quad (m+1 \leqq k \leqq p \leqq n;\ k > 1); \tag{IIIb}$$

einfacher ist es indessen, dieselbe aus (IIIa) dadurch herzuleiten, daß man dort m durch $m+1$ ersetzt und bedenkt, daß

$$Z_{m+1,p} = N_{m,p},\quad Z_{m+1,k-2} = N_{m,k-2},\quad Z_{m+1,k-1} = N_{m,k-1}$$

ist, wodurch man unmittelbar zur Formel (IIIb) gelangt. Allerdings erhält man dieselbe auf diese Weise nur für die Werte $k = m+2$, $m+3, \ldots p$, nicht aber für $k = m+1$; weil aber $N_{m,m} = 1$ und zufolge (20) $N_{m,m-1} = 0$ ist, lautet die Gleichung (IIIb) für $k = m+1$

$$N_{m,p} = Z_{m+1,p}$$

was nach (6) richtig ist.

Das Wesen der beiden Formeln (IIIa) und (IIIb) tritt besonders klar hervor, indem man sie dem Kettenbruche

$$b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{a_k N_{k,p}}{Z_{k,p}}$$

gegenübergestellt; sie erweisen sich dabei einfach als das Ergebnis der Anwendung der in den Gleichungen (II) enthaltenen Regeln auf diesen Kettenbruch. Daraus folgt unmittelbar der Satz:

Von den Kettenbrüchen

$$b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}} + \cdots + \frac{a_p}{b_p}$$

und (23)

$$b_m + \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} + \frac{a_k N_{k,p}}{Z_{k,p}}$$

sind beide zugleich möglich oder unmöglich. Haben sie einen Sinn, so sind ihre Werte einander gleich. Das gilt auch noch für den Fall, daß $m = 0$ und $k = 1$ ist, wovon man sich mit Hilfe der Formeln (15) und (16) in Nr. 2 und Berücksichtigung der zweiten Gleichung (6) in Nr. 1 leicht direkt überzeugt.

Ist der erstere dieser beiden Kettenbrüche ein eigentlicher, so auch der letztere und der Satz sagt in diesem Falle nach den in Nr. 1 gegebenen Erklärungen nichts neues. Anders verhält es sich, wenn der erste Kettenbruch ein uneigentlicher ist; denn jetzt kann der zweite ebenso gut ein eigentlicher als ein uneigentlicher Kettenbruch sein und der Satz kann in keiner Weise aus den Erklärungen in Nr. 2 direkt gefolgert werden. Lautet beispielsweise der erstere der Kettenbrüche (23)

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{0} + \frac{1}{2} + \frac{1}{0}, \qquad (\alpha)$$

so kann man dort $m = 0$ setzen und es ist dann $p = 6$. An Stelle des zweiten tritt dann für $k = 4$ der Kettenbruch

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{0}, \qquad (\beta)$$

dagegen für $k = 2$ der Kettenbruch

$$2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}. \qquad (\gamma)$$

Von diesen drei Kettenbrüchen ist (γ) ein eigentlicher, während (α) und (β) uneigentliche Kettenbrüche sind.

Aus (IIIa), beziehungsweise (IIIb) erhält man für $m = 0$ die Formeln

$$\left.\begin{array}{c} Z_p = a_k N_{k,p} Z_{k-2} + Z_{k,p} Z_{k-1}, \quad N_p = a_k N_{k,p} N_{k-2} + Z_{k,p} N_{k-1} \\ (2 \leqq k \leq p \leqq n) \end{array}\right\}, \qquad \text{(IV)}$$

die, falls $k = p$ ist, in die Gleichungen (II) übergehen.

5. Differenzen der Näherungsbrüche.

Aus den Formeln (II) folgt unmittelbar die Beziehung

$$Z_p N_{p-1} - N_p Z_{p-1} = -a_p (Z_{p-1} N_{p-2} - N_{p-1} Z_{p-2}) \qquad (24)$$

und zwar für die Werte $p = 2, 3, \ldots n$. Ersetzt man hier p nacheinander durch $p - 1, p - 2, \ldots 3, 2$, so erhält man noch weitere $p - 2$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} Z_{p-1} N_{p-2} - N_{p-1} Z_{p-2} = -a_{p-1} (Z_{p-2} N_{p-3} - N_{p-2} Z_{p-3}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_2 N_1 - N_2 Z_1 = -a_2 (Z_1 N_0 - N_1 Z_0), \end{array}\right\} \qquad (25)$$

zu denen man schließlich noch die Gleichung

$$Z_1 N_0 - N_1 Z_0 = (b_0 b_1 + a_1) - b_0 b_1 = a_1 \qquad (26)$$

hinzufügen kann. Aus diesen Gleichungen (24), (25) und (26) gewinnt man aber durch schrittweise Substitution von rückwärts die Formel

$$Z_p N_{p-1} - N_p Z_{p-1} = (-1)^{p-1} a_1 a_2 \cdots a_p \quad (1 \leqq p \leqq n), \qquad \text{(V)}$$

welche man, falls sowohl N_p als auch N_{p-1} von Null verschieden ist, auch in der Gestalt

$$K_p - K_{p-1} = \frac{(-1)^{p-1} a_1 a_2 \cdots a_p}{N_{p-1} N_p} \quad (1 \leqq p \leqq n) \qquad \text{(VI)}$$

anschreiben kann.

Die vorstehenden Formeln lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (IV) verallgemeinern. Ersetzt man dort k durch $k + 1$ und p durch $k + r$ $(r > 0)$, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} Z_{k+r} = a_{k+1} N_{k+1,k+r} Z_{k-1} + Z_{k+1,k+r} Z_k \\ N_{k+r} = a_{k+1} N_{k+1,k+r} N_{k-1} + Z_{k+1,k+r} N_k \end{array}\right\}. \qquad (27)$$

Es ist demnach

$$Z_{k+r}N_k - N_{k+r}Z_k = -a_{k+1}N_{k+1,k+r}(Z_kN_{k-1} - N_kZ_{k-1}).$$

Wendet man hier auf die Differenz rechts die Formel (V) an und beachtet, daß $N_{k+1,k+r} = Z_{k+2,k+r}$ ist, so gelangt man zu der Formel

$$\left.\begin{array}{c} Z_{k+r}N_k - N_{k+r}Z_k = (-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1} Z_{k+2,k+r} \\ (0 \leqq k \leqq n-1;\ 1 \leqq r \leqq n-k) \end{array}\right\}. \qquad \text{(VII)}$$

Die Gültigkeit derselben für $k = 0$ folgt zwar nicht aus der vorstehenden Herleitung; da jedoch $N_0 = 1$ und $Z_0 = b_0$ ist, so lautet die Formel (VII) in diesem Falle

$$Z_r - b_0 N_r = a_1 Z_{2,r}$$

und diese Beziehung besteht zufolge (15) in der Tat für $r = 1, 2, \ldots n$. Unter der Voraussetzung, daß weder N_k noch N_{k+r} verschwindet, folgt aus (VII)

$$K_{k+r} - K_k =$$

$$= (-1)^k \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k+1} Z_{k+2\,k+r}}{N_k N_{k+r}} \quad (0 \leqq k \leqq n-1;\ 1 \leqq r \leqq n-k). \qquad \text{(VIII)}$$

Die Formeln (VII) und (VIII) gehen für $r = 1$ und $k = p - 1$ in (V) beziehungsweise (VI) über.

Ersetzt man auf der rechten Seite der Formel (VIII) N_{k+r} durch den ihm gemäß der zweiten Gleichung (27) zukommenden Ausdruck und dividiert hierauf unter der Annahme, daß $N_{k+1,k+r} = Z_{k+2,k+r}$ nicht Null sei, Zähler und Nenner durch $N_{k+1,k+r}$, so erhält man die Relation

$$K_{k+r} - K_k = \frac{(-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{N_k(a_{k+1}N_{k-1} + K_{k+1,k+r}N_k)}. \qquad \text{(IXa)}$$

Dieselbe kann man noch in etwas anderer Form darstellen. Nach den durch die Gleichungen (4) und (11) festgesetzten Bedeutungen der Zeichen $K_{m,n}$ und $R_{m,n}$ ist

$$K_{k+1,k+r} = b_{k+1} + R_{k+2,k+r};$$

führt man diesen Ausdruck für $K_{k+1,k+r}$ in die Gleichung (IXa) ein und vereinfacht hierauf den Nenner rechts mit Hilfe von (II), so erscheint dieselbe nunmehr in der Gestalt

$$K_{k+r} - K_k = \frac{(-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{N_k(R_{k+2,k+r}N_k + N_{k+1})}. \qquad \text{(IXb)}$$

Eine weitere Formel erhält man aus (VIII), indem man dort k durch $k - 1$ und r durch $r + 1$ ersetzt und sodann mit der rechten Seite der Gleichung genau so verfährt, wie es vorhin behufs Erlangung der Formel (IXa) geschehen ist; sie lautet

$$K_{k+r} - K_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1} a_1 a_2 \cdots a_k K_{k+1,k+r}}{N_{k-1}(a_{k+1} N_{k-1} + K_{k+1,k+r} N_k)}. \qquad (X)$$

Durch Division von (IXa) durch (X) ergibt sich endlich noch

$$\frac{K_{k+r} - K_k}{K_{k-1} - K_{k+r}} = \frac{N_{k-1}}{N_k} \cdot \frac{a_{k+1}}{K_{k+1,k+r}} = \frac{N_{k-1}}{N_k} R_{k+1,k+r}, \qquad (XI)$$

und zwar der letzte Teil zufolge der aus den Gleichungen (4) und (11) resultierenden Beziehung

$$R_{k+1,k+r} = a_{k+1} : K_{k+1,k+r}.$$

Der Gültigkeitsbereich der Formeln (IX), (X) und (XI) ist nach dem Vorstehenden unmittelbar klar; sie gelten für alle Werte von k und r, wofür die Zeichen a, N, K und R definiert sind und die darin vorkommenden Quotienten einen Sinn haben.

6. Folgerungen aus den Resultaten der vorigen Nummer.

In dem Kettenbruche (13), auf dessen Näherungsbrüche die soeben gefundenen Formeln sich beziehen, können die Teilzähler ebenso wie die Teilnenner beliebige reelle oder komplexe Zahlen vorstellen. Es ist daher auch der Fall nicht ausgeschlossen, daß einer oder mehrere der Teilzähler verschwinden. Diesen Fall wollen wir nun näher ins Auge fassen.

Es sei also $a_{k+1} = 0$ und zwar sei dies die einzige oder, falls deren mehrere vorhanden sind, die erste verschwindende Zahl unter den Teilzählern $a_1 a_2 \ldots a_n$. Dann ist zufolge der Formel (VII)

$$Z_{k+r} N_k - N_{k+r} Z_k = 0 \quad (1 \leqq r \leqq n-k). \qquad (28)$$

Nehmen wir nun zunächst an, es sei $k = 0$, dann geht die vorstehende Gleichung in

$$Z_r = b_0 N_r$$

über und es ist somit entweder $Z_r = N_r = 0$ oder aber N_r von Null verschieden und

$$K_r = \frac{Z_r}{N_r} = b_0 = K_0.$$

Wenn dagegen $k > 0$ ist, so besteht neben (28) gemäß der Formel (V) noch die Gleichung

$$Z_k N_{k-1} - N_k Z_{k-1} = (-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_k,$$

der zufolge, da von den Zahlen $a_1 a_2 \ldots a_k$ keine mehr verschwinden soll,

$$|Z_k N_{k-1} - N_k Z_{k-1}| > 0$$

sein muß. Es können also von den Zahlen Z_k und N_k nicht beide zugleich verschwinden. Ist nun $N_k = 0$, so muß demnach $|Z_k| > 0$

sein, wonach die Gleichung (28) $N_{k+r} = 0$ für alle Werte $r = 1, 2, \ldots n-k$ ergibt. Auch falls N_k nicht verschwindet, kann doch $N_{k+r} = 0$ sein, es muß dann aber zufolge (28) auch der zugehörige Zähler Z_{k+r} verschwinden; so ist z. B. in dem Kettenbruche

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{0}{2} - \frac{2}{1}$$

$Z_3 = N_3 = 0$. Wenn aber neben N_k auch N_{k+r} von Null verschieden ist, so hat man nach (28)

$$K_{k+r} = \frac{Z_{k+r}}{N_{k+r}} = \frac{Z_k}{N_k} = K_k.$$

Ist also K_n ein Kettenbruch, von dessen Teilzählern $a_1 a_2 \ldots a_n$ mindestens einer den Wert Null hat, und a_{k+1} der erste verschwindende Teilzähler, so ist entweder der Kettenbruch K_k sinnlos und dann hat auch keiner der Näherungsbrüche

$$K_{k+1},\ K_{k+2},\ \cdots,\ K_{n-1},\ K_n \tag{29}$$

einen Sinn; oder aber es hat K_k einen Sinn und in diesem Falle läßt sich über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Näherungsbrüche (29) im allgemeinen nichts aussagen, jedoch haben die möglichen unter ihnen sämtlich mit K_k gleichen Wert. Insbesondere ist, wenn K_n einen Sinn hat, stets $K_n = K_k$.

Aus diesem Grunde erscheint es unnötig, Kettenbrüche, die verschwindende Teilzähler enthalten, in die Betrachtung noch weiter einzubeziehen.[1])

Es seien also jetzt die sämtlichen Teilzähler des Kettenbruches (13) von Null verschieden; dann lassen sich aus der Formel (V) unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Näherungsbrüche erkennen:

1) Es können nicht Zähler und Nenner eines Näherungsbruches zugleich verschwinden.

2) Es können weder die Zähler noch die Nenner zweier unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüche desselben Kettenbruches zugleich verschwinden; also können auch nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche zugleich sinnlos sein.

3) Es können nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche desselben Kettenbruches einander gleich sein.

Ein wichtiger Satz läßt sich noch aus der Formel (VII) ableiten, nämlich:

1) Nicht aber darf man, was schon M. Stern (Theorie der Kettenbrüche (1884) § 22) mit einer heute allerdings nicht mehr stichhaltigen Begründung bemerkt hat, wenn in einem Kettenbruche K_n ein Teilzähler $a_m = 0$ ist, unbedingt alle folgenden Glieder unbeschadet des Wertes dieses Kettenbruches weglassen. Es kann ja K_n sinnlos sein, während K_{m-1} einen Sinn hat. Weiß man jedoch, daß K_n einen Sinn hat, dann ist allerdings $K_n = K_{m-1}$.

4) „Wenn der Nenner N_n des Kettenbruches K_n, der keinen verschwindenden Teilzähler enthalten soll, von Null verschieden ist, so ist der Kettenbruch ein uneigentlicher oder ein eigentlicher, je nachdem der n^{te} Näherungsbruch, d. i. der Wert von K_n, einem seiner Vorgänger gleich ist oder nicht, welcher im ersteren Falle zufolge 3) niemals der unmittelbar vorhergehende K_{n-1} sein kann. Neben $Z_{p,n} = N_{p-1,n} = 0$ $(2 \leqq p \leqq n)$ ist $K_{p-2} = K_n$ und umgekehrt."

Beweis. Setzt man in der Formel (VII) $k + r = n$, so erhält man

$$Z_n N_k - N_n Z_k = (-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1} Z_{k+2,n} \quad (0 \leqq k < n). \tag{30}$$

Angenommen nun es sei K_n ein uneigentlicher Kettenbruch, dann existiert mindestens eine Zahl p $(1 < p \leqq n)$, wofür $Z_{p,n} = 0$ ist. Läßt man nun in (30) k mit $p - 2$ zusammenfallen, so hat man demnach

$$Z_n N_{p-2} - N_n Z_{p-2} = 0. \tag{31}$$

Da N_n von Null verschieden ist, kann N_{p-2} nicht verschwinden, weil sonst auch $Z_{p-2} = 0$ sein müßte, was nach dem Satze 1) unmöglich ist. Es ist somit N_{p-2} von Null verschieden und die Gleichung (31) ergibt

$$K_n = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{p-2}}{N_{p-2}} = K_{p-2}. \tag{32}$$

Besteht umgekehrt die Gleichung (32), also auch (31), für einen bestimmten Wert von p $(1 < p \leqq n)$, so ist zufolge (30) $Z_{p,n} = 0$, also K_n ein uneigentlicher Kettenbruch. Daraus folgt aber, daß, falls der Näherungsbruch K_n keinem seiner Vorgänger gleich ist, der Kettenbruch K_n ein eigentlicher sein muß, womit der Satz bewiesen ist.

Auf Grund dieses Satzes erhält man auch durch Berechnung der Näherungsbrüche des Kettenbruches K_n nach dem in Nr. 3 angegebenen Verfahren darüber Aufschluß, ob K_n ein eigentlicher oder uneigentlicher Kettenbruch ist.

Wir wollen hier noch eine Eigenschaft der Kettenbrüche hervorheben. Ist ein beliebiger eigentlicher oder uneigentlicher oder auch sinnloser Kettenbruch

$$K_n \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \quad (n > 0) \tag{33}$$

vorgelegt, der jedoch keinen verschwindenden Teilzähler besitzen soll, und fügt man zu demselben noch das Glied $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ als neues Endglied hinzu, so läßt sich durch entsprechende Wahl der Zahlen a_{n+1} und b_{n+1} bewirken, daß der Zähler Z_{n+1} und der Nenner N_{n+1} des da-

durch entstehenden neuen Kettenbruches K_{n+1} je einer beliebig vorgeschriebenen Zahl gleich werden. Denn man hat nach den Formeln (II)

$$Z_{n+1} = a_{n+1}Z_{n-1} + b_{n+1}Z_n, \quad N_{n+1} = a_{n+1}N_{n-1} + b_{n+1}N_n \quad (34)$$

und die Determinante $Z_nN_{n-1} - N_nZ_{n-1}$ dieser beiden Gleichungen ist zufolge der Formel (V) von Null verschieden. Somit entspricht diesen Gleichungen, falls Z_{n+1} und N_{n+1} gegeben sind, ein und nur ein Paar von Zahlen a_{n+1} und b_{n+1}. Ist dabei N_{n+1} von Null verschieden, so ist der neue Kettenbruch K_{n+1} ein uneigentlicher oder ein eigentlicher, je nachdem $\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}}$ einem der Ausdrücke $\frac{Z_0}{N_0}, \frac{Z_1}{N_1}, \cdots \frac{Z_n}{N_n}$ gleich ist oder nicht. Ist dagegen $N_{n+1} = 0$, so ist K_{n+1} selbstverständlich sinnlos. Durch Hinzufügung eines neuen Schlußgliedes kann also aus einem beliebig vorgelegten Kettenbruche sowohl ein eigentlicher als ein uneigentlicher als auch ein sinnloser Kettenbruch entstehen. Aus den Gleichungen (34) ergibt sich $a_{n+1} = 0$ dann und nur dann, wenn $Z_{n+1} = \omega Z_n$ und $N_{n+1} = \omega N_n$ ist, wobei ω eine beliebige Zahl bedeutet. Will man also haben, daß auch der neue Kettenbruch K_{n+1} keinen verschwindenden Teilzähler besitze, so darf man Z_{n+1} und N_{n+1} nicht den Zahlen Z_n und N_n proportional wählen.

Es ist nun klar, daß ein Kettenbruch auch dadurch, daß man eines oder mehrere seiner Schlußglieder wegläßt, seinen Charakter ändern, d. i. beispielsweise aus einem eigentlichen ein uneigentlicher oder sinnloser werden kann. Ein solches Verhalten tritt in den folgenden Beispielen zu Tage.

1) Es sei in dem Kettenbruche (33) $n > 1$ und er enthalte die verschwindenden Teilnenner

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_{m+r} = 0 \quad (m \geqq 1,\ m + r \leqq n),$$

während die übrigen Teilnenner beliebige Zahlen sein können. Nach den Formeln (II) ist dann

$$Z_{m+s} = a_{m+s}Z_{m+s-2}, \quad N_{m+s} = a_{m+s}N_{m+s-2} \quad (s = 1, 2, \cdots r),$$

somit, wenn $2p - 1$, beziehungsweise $2p$ die Zahl r nicht übersteigt,

$$\begin{aligned} Z_{m+2p-1} &= a_{m+1}a_{m+3}\cdots a_{m+2p-1}Z_{m-1} \\ N_{m+2p-1} &= a_{m+1}a_{m+3}\cdots a_{m+2p-1}N_{m-1} \\ Z_{m+2p} &= a_{m+2}a_{m+4}\cdots a_{m+2p}Z_m \\ N_{m+2p} &= a_{m+2}a_{m+4}\cdots a_{m+2p}N_m. \end{aligned}$$

Hat nun weder N_m noch N_{m-1} den Wert Null, so ist demnach

$$K_{m-1} = K_{m+1} = \cdots = K_{m+2p-1}$$
$$K_m = K_{m+2} = \cdots = K_{m+2p}.$$

Die Kettenbrüche $K_{m+1}, K_{m+2}, \ldots, K_{m+r}$ sind also uneigentliche, mag nun K_n selbst ein eigentlicher, uneigentlicher oder auch sinnloser Kettenbruch sein. Ist dagegen $N_m = 0$ oder $N_{m-1} = 0$, so sind die Kettenbrüche $K_m, K_{m+2}, \ldots K_{m+2p}$ beziehungsweise $K_{m-1}, K_{m+1}, \cdots K_{m+2p-1}$ sinnlos.

Demnach ist der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1}{0} \dot{+} \frac{a_2}{0} \dot{+} \frac{a_3}{0} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{0} \quad (n \geqq 1)$$

ein uneigentlicher oder sinnloser, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

2) Verkürzt man den Kettenbruch

$$K_{m+1} \equiv \frac{1}{c_1} \dot{-} \frac{c_1 c_2}{c_2} \dot{-} \frac{c_2 c_3}{c_3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{c_{m-1} c_m}{c_m} \dot{-} \frac{a}{b}, \qquad (\alpha)$$

worin die Zahlen $c_1, c_2, \ldots c_m, a, b$ von Null verschieden sind, nacheinander um 1, 2, ... $m-1$ Glieder, so erhält man die Kettenbrüche

$$K_r \equiv \frac{1}{c_1} \dot{-} \frac{c_1 c_2}{c_2} \dot{-} \frac{c_2 c_3}{c_3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{c_{r-1} c_r}{c_r} \quad (2 \leqq r \leqq m),$$

welche, da $Z_{r-1,r} = 0$ ist, entweder uneigentlich oder sinnlos sind. Dabei hat man, so lange als die Zeiger die Zahl m nicht überschreiten, neben $Z_1 = 1$ und $N_1 = c_1$ für $p \geqq 1$

$$Z_{3p-1} = (-1)^{p-1} c_2 c_3 \cdots c_{3p-1} \qquad N_{3p-1} = 0$$
$$Z_{3p} = 0 \qquad N_{3p} = (-1)^p c_1 c_2 \cdots c_{3p}$$
$$Z_{3p+1} = (-1)^p c_2 c_3 \cdots c_{3p+1} \qquad N_{3p+1} = (-1)^p c_1 c_2 \cdots c_{3p+1}$$

und zwar findet man diese Werte auf Grund der Formeln (II) durch den Schluß von n auf $n+1$, beziehungsweise von $3p$ auf $3p+3$ usw. Es ist daher K_{3p-1} unmöglich, während

$$K_{3p} = 0 \quad \text{und} \quad K_{3p+1} = \frac{1}{c_1}$$

ist. Der Kettenbruch (α) selbst ist im allgemeinen ein eigentlicher. Wenn z. B. $m = 3k$ ist, so hat man

$$Z_{m+1} = (-1)^k c_2 c_3 \cdots c_{m-1} a, \; N_{m+1} = (-1)^k c_1 c_2 \cdots c_m b, \; K_{m+1} = \frac{a}{c_1 c_m b}.$$

Es ist also weder $N_{m+1} = 0$ noch, falls nicht gerade $a = c_m b$ ist, K_{m+1} einem seiner Vorgänger, deren Werte entweder Null oder $\frac{1}{c_1}$ sind, gleich.

7. Transformation eines Kettenbruches in einen äquivalenten Ausdruck.

Jede Umwandlung eines Kettenbruches $K_n \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ in einen mit ihm gleichwertigen und von den nämlichen Größen $b_0, a_1, b_1, \ldots a_n, b_n$

abhängigen Ausdruck P_n heißt eine **Transformation** desselben. Da der neue Ausdruck P_n nicht wieder ein Kettenbruch zu sein braucht, so fällt unter diesen Begriff auch die **Reduktion**, d. i. die in Nr. 1 bis 3 besprochene Überführung von K_n in einen einfachen Quotienten $\frac{Z_n}{N_n}$. Von den übrigen Transformationen eines Kettenbruches ist von besonderer Wichtigkeit die Verwandlung eines solchen in einen **äquivalenten Ausdruck**. Seidel, von dem der Begriff der Äquivalenz in dem hier gebrauchten Sinne eingeführt wurde[1]), bezeichnet als **äquivalent** zwei Kettenbrüche, welche dieselbe Reihe von Näherungsbrüchen haben, d. h. deren gleichvielten Näherungsbrüche einen und denselben Wert besitzen oder auch zugleich sinnlos sind, aber auch einen Kettenbruch K_n und eine Reihe $s_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$, deren Partialsummen $s_0, s_1, \cdots s_n$ mit den Näherungsbrüchen $K_0, K_1, \cdots K_n$ der Reihe nach übereinstimmen.[2]) Allgemein sind als **äquivalent** zu betrachten irgend zwei Funktionen P_m und Q_m der ganzzahligen Veränderlichen m, welche für die nämlichen Werte von m definiert und für jeden dieser Werte einander gleich sind, gleichviel ob die Anzahl dieser Werte eine begrenzte oder eine unbegrenzte sei. Dabei ist in einem Kettenbruche jeder Näherungsbruch, in einer Reihe jede Partialsumme usw. als ein Funktionswert aufzufassen.

Wir betrachten nun zunächst die Äquivalenz zweier Kettenbrüche. Offenbar sind die Kettenbrüche

$$K_n \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \quad \text{und} \quad K_n' \equiv \left[b_0' + \frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^n$$

dann und nur dann äquivalent, wenn

$$b_0' = b_0 \quad \text{und} \quad Z_r' = q_r Z_r, \quad N_r' = q_r N_r \quad (r = 1, 2, \cdots n) \tag{35}$$

ist, worin $q_1, q_2, \cdots q_n$ von Null verschiedene Zahlen bedeuten, während Z_r' und N_r' die Näherungszähler, bezw. Näherungsnenner des Kettenbruches K_n' vorstellen. Es besteht nun der Satz:

Satz 1: Multipliziert man in dem Kettenbruche K_n Zähler und Nenner eines Teilbruches $\frac{a_p}{b_p}$ und, falls nicht $p = n$ ist, auch den Zähler a_{p+1} des auf $\frac{a_p}{b_p}$ folgenden Teilbruches mit einer beliebigen, jedoch von Null verschieden Zahl c, so geht der Kettenbruch K_n in einen äquivalenten (K_n') über.

Beweis. Zunächst hat man $Z_r' = Z_r$ und $N_r' = N_r$ für

$$r = 0, 1, 2, \cdots p - 1.$$

1) L. Seidel, Abhandl. d. bayr. Ak. VII. (1853), S. 565 u. 566.

2) Eine allgemeinere, jedoch nur auf unendliche Kettenbrüche, unendliche Reihen usw. berechnete Definition dieses Äquivalenzbegriffes findet man bei S. Günther, Schlömilchsche Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXI (1876), S. 189.

Ferner findet man mit Hilfe der Formeln (II) $Z'_p = cZ_p$, $N'_p = cN_p$ und daher auch

$$Z'_{p+1} = ca_{p+1}Z_{p-1} + b_{p+1}Z'_p = cZ_{p+1},$$
$$N'_{p+1} = ca_{p+1}N_{p-1} + b_{p+1}N'_p = cN_{p+1}.$$

Hieraus folgt aber auf Grund der genannten Formeln weiter

$$Z'_{p+2} = cZ_{p+2}, \quad N'_{p+2} = cN_{p+2}$$

usw., allgemein

$$Z'_r = cZ_r, \quad N'_r = cN_r \quad (r = p, p+1, p+2, \cdots n).$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes gewinnt man den folgenden:

Satz 2: Jeder Kettenbruch

$$b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3}{c_3 b_3} + \cdots + \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n}, \tag{36}$$

in welchem $c_1, c_2, \cdots c_n$ beliebige von Null verschiedene Zahlen vorstellen, ist dem Kettenbruche $K_n \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ äquivalent, und zwar haben die Näherungszähler (Z'_r) und Näherungsnenner (N'_r) des ersteren die Werte

$$Z'_r = c_1 c_2 \cdots c_r Z_r, \quad N'_r = c_1 c_2 \cdots c_r N_r \quad (r = 1, 2, \cdots n).$$

Durch geeignete Wahl der Faktoren $c_1, c_2, \cdots c_n$ können die Teilzähler des Kettenbruches (36) beliebig gegebene Werte mit Ausschluß der Null erhalten, z. B. alle der positiven oder auch der negativen Einheit gleich werden. Bezeichnet ε eine dieser Einheiten und will man

$$c_1 a_1 = \varepsilon, \quad c_1 c_2 a_2 = \varepsilon, \cdots, \quad c_{n-1} c_n a_n = \varepsilon$$

erhalten, so braucht man nur

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{a_1}; \quad c_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}, \quad c_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}} \varepsilon \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{37}$$

zu setzen. Nimmt man hier $\varepsilon = -1$, so gewinnt der Kettenbruch (36) die Gestalt

$$b_0 - \frac{1}{b'_1} - \frac{1}{b'_2} - \cdots - \frac{1}{b'_n},$$

welche nach Seidel[1]) die reduzierte Form des Kettenbruches K_n heißt. Hierzu sei bemerkt, daß allgemein äquivalente Kettenbrüche als verschiedene Formen eines und desselben Kettenbruches aufgefaßt werden. Dem entsprechend wird auch der aus (36) und (37) durch

1) Seidel a. a. O. S. 567.

die Annahme $\varepsilon = 1$ hervorgehende Kettenbruch von der Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1''} + \frac{1}{b_2''} + \cdots + \frac{1}{b_n''}$$

als Hauptform[1]) des Kettenbruches K_n bezeichnet.

Erwähnenswert ist endlich noch der Fall, daß in (36)

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = c$$

genommen wird, wodurch der Kettenbruch K_n in den ihm äquivalenten

$$b_0 + \frac{ca_1}{cb_1} + \frac{c^2a_2}{cb_2} + \frac{c^2a_3}{cb_3} + \cdots + \frac{c^2a_n}{cb_n} \tag{38}$$

verwandelt erscheint.

Wie Seidel[2]) bemerkt hat, gilt auch die Umkehrung des Satzes 2, d. h.

Satz 3: Jeder mit K_n äquivalente Kettenbruch ist in der Form (36) enthalten.

Beweis. Es sei K_n' ein beliebiger mit K_n äquivalenter Kettenbruch, so daß für seine Näherungszähler Z_r' und Näherungsnenner N_r' die Gleichungen (35) bestehen. Man findet dann aus $N_1' = q_1 N_1$ und $Z_1' = q_1 Z_1$ unmittelbar $b_1' = q_1 b_1$ und $a_1' = q_1 a_1$. Ferner ist nach den Formeln (II) für $r = 2, 3, \cdots n$

$$a_r Z_{r-2} + b_r Z_{r-1} = Z_r, \qquad a_r N_{r-2} + b_r N_{r-1} = N_r,$$

und daraus ergibt sich

$$a_r = \frac{Z_r N_{r-1} - N_r Z_{r-1}}{Z_{r-2} N_{r-1} - N_{r-2} Z_{r-1}}, \qquad b_r = \frac{Z_{r-2} N_r - N_{r-2} Z_r}{Z_{r-2} N_{r-1} - N_{r-2} Z_{r-1}}. \tag{39}$$

Ebenso ist aber auch

$$a_r' Z_{r-2}' + b_r' Z_{r-1}' = Z_r', \qquad a_r' N_{r-2}' + b_r' N_{r-1}' = N_r' \tag{40}$$

und daher

$$a_r' = \frac{Z_r' N_{r-1}' - N_r' Z_{r-1}'}{Z_{r-2}' N_{r-1}' - N_{r-2}' Z_{r-1}'}, \qquad b_r' = \frac{Z_{r-2}' N_r' - N_{r-2}' Z_r'}{Z_{r-2}' N_{r-1}' - N_{r-2}' Z_{r-1}'}. \tag{41}$$

Stellt man nun die beiden linksstehenden und ebenso die beiden rechtsstehenden von den Formeln (39) und (41) einander gegenüber und berücksichtigt die Gleichungen (35), so findet man daraus

$$a_r' = \frac{q_r}{q_{r-2}} a_r \quad \text{und} \quad b_r' = \frac{q_r}{q_{r-1}} b_r, \tag{42}$$

und zwar zunächst für die Werte $r = 3, 4, \cdots n$. Von diesen Resultaten gilt aber das letztere und, falls man unter q_0 die Zahl 1 versteht, auch das erstere für $r = 2$; dies folgt ebenfalls aus den For-

1) Vgl. Pringsheim, Encyklopädie I. S. 121.
2) Seidel a. a. O. S. 566.

meln (39), (41) und (35), indem man noch beachtet, daß $N_0' = N_0 = 1$ und $Z_0' = Z_0 = b_0$ ist.

Setzt man nun $\frac{q_r}{q_{r-1}} = c_r$, so ist

$$\frac{q_r}{q_{r-2}} = \frac{q_r}{q_{r-1}} \cdot \frac{q_{r-1}}{q_{r-2}} = c_{r-1} c_r,$$

und die Formeln (42) lauten demnach jetzt

$$a_r' = c_{r-1} c_r a_r \quad \text{und} \quad b_r' = c_r b_r \quad (r = 2, 3, \cdots n).$$

Außerdem ist wegen $q_1 = c_1$ noch $a_1' = c_1 a_1$ und $b_1' = c_1 b_1$. Es hat also K_n' in der Tat die Gestalt (36).

Wir wenden uns nun noch der Verwandlung eines Kettenbruches in eine äquivalente Reihe zu. Sind in dem Kettenbruche $K_n \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ die sämtlichen Näherungsnenner $N_1, N_2, \cdots N_n$ von Null verschieden, so ist

$$K_n = b_0 + (K_1 - b_0) + (K_2 - K_1) + \cdots + (K_n - K_{n-1})$$

und man hat daher nach Formel (VI)

$$K_n = b_0 + \frac{a_1}{N_1} - \frac{a_1 a_2}{N_1 N_2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{N_{n-1} N_n},^{1}) \qquad (43)$$

wodurch K_n in eine äquivalente Reihe verwandelt erscheint.

Befinden sich unter den Näherungsnennern solche, welche den Wert Null haben, so kann man die Entwicklung von K_n in eine Reihe doch vornehmen, wenn nur von einer bestimmten Stelle $r = m$ an keiner der Nenner N_r mehr verschwindet. An Stelle von (43) tritt dann die Gleichung

$$K_n = \frac{Z_m}{N_m} + \frac{(-1)^m a_1 a_2 \cdots a_{m+1}}{N_m N_{m+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{N_{n-1} N_n}. \qquad (44)$$

Allerdings ist diese Reihe mit dem Kettenbruche K_n nicht mehr vollkommen äquivalent, da ihre Partialsummen die Näherungsbrüche von K_n erst vom m^{ten} an wiedergeben. Deshalb verliert diese Darstellung des Kettenbruches jedoch nichts an Wichtigkeit, da es bei Untersuchungen über Kettenbrüche in der Regel nur auf das Verhalten der Näherungsbrüche von einer bestimmten Stelle an ankommt.

8. Kontraktion eines Kettenbruches.

Die Formeln (41) führen unmittelbar zur Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe. „Es sind bei gegebenem b_0' $2m$ Zahlen $a_1', b_1', a_2', b_2', \cdots a_m', b_m'$ so zu bestimmen, daß die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche

1) Euler, Introductio in Anal. inf. I. § 368.

$K_1', K_2', \cdots K_m'$ des Kettenbruches $K_m' \equiv \left[b_0' + \frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$ der Reihe nach die gegebenen Werte $Z_1', Z_2', \cdots Z_m'$ bezw. $N_1', N_2', \cdots N_m'$ annehmen, welche nur so gewählt sein sollen, daß von den Ausdrücken

$$Z_r' N_{r-1}' - N_r' Z_{r-1}' \quad (r = 1, 2, \cdots m),$$

worin $Z_0' = b_0'$ und $N_0' = 1$ zu nehmen ist, keiner verschwindet."

Um die Aufgabe zu lösen, setze man zunächst

$$b_1' = N_1' \quad \text{und} \quad a_1' = Z_1' - b_0' N_1',$$

wodurch bewirkt wird, daß Zähler und Nenner des ersten Näherungsbruches von K_m' bei beliebiger Wahl der übrigen Zahlen a_r', b_r' $(r \geqq 2)$ die Werte Z_1' und N_1' erhalten. Hierauf bestimme man die übrigen Teilzähler und Teilnenner vom zweiten angefangen aus den Formeln (41). Die auf solche Weise gewonnenen Zahlen a_r' und b_r' sind dann die Wurzeln der Gleichungspaare (40) für $r = 2, 3, \cdots m$ und daraus folgt unmittelbar, daß die Näherungsbrüche K_r' des diesen Werten von a_r' und b_r' $(r = 1, 2, \cdots m)$ entsprechenden Kettenbruches K_m' wirklich die Zähler Z_r' und Nenner N_r' besitzen.

Falls keine der Zahlen $N_1', N_2', \cdots N_m'$ Null ist, können anstatt der Näherungszähler $Z_1', Z_2', \cdots Z_m'$ auch die Näherungsbrüche $K_1', K_2', \cdots K_m'$ selbst gegeben sein. Denn aus den Größen N_r' und K_r' ergeben sich die Zähler Z_r' mittels der Gleichungen

$$Z_r' = K_r' N_r' \quad (r = 1, 2, \cdots m),$$

wodurch dieser Fall auf den obigen zurückgeführt erscheint. Dabei dürfen jedoch von den Zahlen $K_1', K_2', \cdots K_m'$ nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende einander gleich sein, weil aus $K_r' = K_{r-1}'$

$$Z_r' N_{r-1}' - N_r' Z_{r-1}' = N_r' N_{r-1}' (K_r' - K_{r-1}') = 0$$

folgen würde.[1])

Einen besonderen Fall der vorstehenden Aufgabe bildet die Kontraktion[2]) eines Kettenbruches $K_n \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$, d. i. die Verwandlung desselben in einen anderen $K_m' = \left[b_0' + \frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^m$ von geringerer Gliederanzahl, dessen Näherungszähler $Z_0', Z_1', Z_2', \cdots Z_m'$ und Näherungsnenner $N_1', N_2', \cdots N_m'$ den zum ursprünglichen Kettenbruche K_n gehörigen Ausdrücken

$$\frac{Z_{n_0}}{N_{n_0}}, Z_{n_1}, Z_{n_2}, \cdots Z_{n_m} \quad \text{und} \quad N_{n_1}, N_{n_2}, \cdots N_{n_m}$$

der Reihe nach gleich sind. Dabei sind die Zeiger $n_0, n_1, \cdots n_m$ als steigend zu betrachten, unter n_m ist n selbst zu verstehen und N_{n_0}

1) Vgl. auch Satz 3) in Nr. 6.

2) Seidel a. a. O. S. 567.

muß von Null verschieden sein. Um den verlangten Kettenbruch K'_m zu erhalten, hat man zunächst

$$b'_0 = \frac{Z_{n_0}}{N_{n_0}}, \quad b'_1 = N_{n_1} \quad \text{und} \quad a'_1 = Z_{n_1} - \frac{Z_{n_0}}{N_{n_0}} N_{n_1} \qquad (\alpha)$$

zu setzen. Die Werte der Zähler und Nenner der übrigen Glieder $\frac{a'_r}{b'_r}$ ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (41), indem man darin den Zeiger r von 2 bis m laufen läßt und

$$Z'_0, Z'_1, Z'_2, \cdots Z'_m, \quad N'_0, N'_1, N'_2, \cdots N'_m$$

durch

$$\frac{Z_{n_0}}{N_{n_0}}, Z_{n_1}, Z_{n_2}, \cdots Z_{n_m}, \; 1, \; N_{n_1}, N_{n_2}, \cdots N_{n_m}$$

ersetzt. Man findet auf diese Weise

$$a'_2 = \frac{Z_{n_2} N_{n_1} - N_{n_2} Z_{n_1}}{Z_{n_0} N_{n_1} - N_{n_0} Z_{n_1}} N_{n_0}, \qquad b'_2 = \frac{Z_{n_0} N_{n_2} - N_{n_0} Z_{n_2}}{Z_{n_0} N_{n_1} - N_{n_0} Z_{n_1}} \qquad (45)$$

und für $r = 3, 4, \cdots m$

$$a'_r = \frac{Z_{n_r} N_{n_{r-1}} - N_{n_r} Z_{n_{r-1}}}{Z_{n_{r-2}} N_{n_{r-1}} - N_{n_{r-2}} Z_{n_{r-1}}}, \quad b'_r = \frac{Z_{n_{r-2}} N_{n_r} - N_{n_{r-2}} Z_{n_r}}{Z_{n_{r-2}} N_{n_{r-1}} - N_{n_{r-2}} Z_{n_{r-1}}}. \qquad (46)$$

Aus diesem Resultate ersieht man, daß sich nicht jeder Kettenbruch K_n in beliebiger Weise, d. h. bei beliebiger Wahl der Zahl m und der Zeiger $n_0, n_1, \cdots n_{m-1}$ kontrahieren läßt. Es sind vielmehr nur solche Kontraktionen möglich, bei denen neben N_{n_0} auch die sämtlichen Nenner der vorstehenden Formeln von Null verschieden sind. Das letztere trifft nach dem Satze 4. in Nr. 6 stets zu, falls nicht nur K_n selbst, sondern auch seine sämtlichen Näherungsbrüche $K_1, K_2, \cdots K_{n-1}$ eigentliche Kettenbrüche sind, jedoch nicht bei beliebiger Wahl von $m, n_0, n_1, \cdots n_{m-1}$, wenn sich unter den Kettenbrüchen $K_1, K_2, \cdots K_n$ auch uneigentliche oder sinnlose vorfinden.

Beispiel. Es sei in dem Kettenbruche K_n

$$b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_{p+q} = 0 \quad (p \geqq 0, \; 1 \leqq q < n - p),$$

während b_{p+q+1} von Null verschieden sein soll; dann läßt sich derselbe in folgender Art kontrahieren. Das Anfangsglied, sowie das erste, zweite, $\cdots p^{\text{te}}$ Glied bleiben ungeändert, so daß $b'_0 = b_0$ und $a'_r = a_r$, $b'_r = b_r$ für $r = 1, 2, \cdots p$ ist. Dagegen soll

$$Z'_{p+s} = Z_{p+q+s} \quad \text{und} \quad N'_{p+s} = N_{p+q+s} \quad (s = 1, 2, \cdots n - p - q)$$

werden. Man findet dann aus den Gleichungen (46) unter Zuhilfenahme der Formel (V) bezw. (VII)

$$a'_{p+s} = a_{p+q+s}, \quad b'_{p+s} = b_{p+q+s} \quad (s = 3, 4, \cdots n - p - q).$$

Für $s = 1$ und $s = 2$ lauten die neuen Teilzähler und Teilnenner verschieden, je nachdem q gerade oder ungerade ist. Um dieselben zu berechnen, beachte man zunächst, daß die Gleichungen (46) zufolge (45)

im vorliegenden Falle auch für $r = 2$ gelten, da hier $N_{n_0} = N_0 = 1$ ist. Im Hinblicke auf die Formel (VII) ergibt sich nun aus denselben zunächst

$$a'_{p+1} = a_{p+1} Z_{p+2,p+q+1}, \quad b'_{p+1} = Z_{p+1,p+q+1}, \tag{\beta}$$

$$a'_{p+2} = (-1)^q \frac{a_{p+2} a_{p+3} \cdots a_{p+q+2}}{Z_{p+2,p+q+1}}, \quad b'_{p+2} = \frac{Z_{p+2,p+q+2}}{Z_{p+2,p+q+1}}. \tag{\gamma}$$

Alle diese Resultate gelten auch, falls $p = 0$ ist. Die Formeln (β) folgen in diesem Falle aus den Gleichungen (α), welche für das vorliegende Beispiel lauten

$$b'_0 = b_0, \quad b'_1 = N_{q+1} = Z_{1,q+1} \quad \text{und} \quad a'_1 = Z_{q+1} - b_0 N_{q+1},$$

woraus man mit Benützung von (VII)

$$a'_1 = a_1 Z_{2,q+1}$$

erhält. Aus (β) und (γ) ergibt sich nun durch wiederholte Anwendung der Formel (7) S. 467 bei geradem q

$$a'_{p+1} = a_{p+1} a_{p+3} \cdots a_{p+q-1} a_{p+q+1},$$
$$b'_{p+1} = a_{p+2} a_{p+4} \cdots a_{p+q} b_{p+q+1},$$
$$a'_{p+2} = a_{p+2} a_{p+4} \cdots a_{p+q+2}, \qquad b'_{p+2} = b_{p+q+2},$$

dagegen bei ungeradem q

$$a'_{p+1} = a_{p+1} a_{p+3} \cdots a_{p+q} b_{p+q+1},$$
$$b'_{p+1} = a_{p+2} a_{p+4} \cdots a_{p+q-1} a_{p+q+1},$$
$$a'_{p+2} = -a_{p+2} a_{p+4} \cdots a_{p+q+1} a_{p+q+2} : b_{p+q+1},$$
$$b'_{p+2} = (b_{p+q+1} b_{p+q+2} + a_{p+q+2}) : b_{p+q+1}.$$

Im letzteren Falle kann man zufolge des 1. Satzes in Nr. 7 a'_{p+2}, b'_{p+2}, a'_{p+3} der Reihe nach durch

$$b_{p+q+1} a'_{p+2}, \quad b_{p+q+1} b'_{p+2}, \quad b_{p+q+1} a'_{p+3}$$

ersetzen.

9. Kettenbrüche, deren Teilzähler und Teilnenner sämtlich positiv sind.

Während die vorhergehenden Nummern von den Kettenbrüchen im allgemeinen handelten, wollen wir uns jetzt noch mit einigen besonderen Klassen derselben befassen und zwar ausschließlich mit solchen Kettenbrüchen, die aus lauter reellen Zahlen gebildet sind. Das einfachste Verhalten zeigen unter diesen jene Kettenbrüche, deren Teilzähler und Teilnenner sämtlich positiv sind, und von solchen nur wird in dieser und der nächsten Nummer die Rede sein.

Es seien also in dem Kettenbruche

$$K_n \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dotplus \frac{a_2}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_n}{b_n}$$

$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_n, b_n$ lauter positive Zahlen; dann ist, wie nach den

Ausführungen in Nr. 1 und 2 unmittelbar erhellt, nicht nur der Kettenbruch K_n selbst, sondern auch jeder aus ihm durch Weglassung eines oder mehrerer beliebiger Glieder hervorgehende Kettenbruch stets ein eigentlicher Kettenbruch. Ebenso ist es klar, daß im vorliegenden Falle alle N_k und, wenn b_0 nicht negativ ist, auch alle Zähler Z_k der Näherungsbrüche K_k $(k = 1, 2, \cdots n)$ positiv ausfallen müssen.

Aus der Formel (VIII) erhält man für $r = 2$, indem man bedenkt, daß $Z_{k+2,k+2} = b_{k+2}$ ist,

$$K_{k+2} - K_k = \frac{(-1)^k a_1 a_2 \cdots a_{k+1} b_{k+2}}{N_k N_{k+2}}.$$

Die Differenz $K_{k+2} - K_k$ ist also positiv oder negativ, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Demnach bilden die Näherungsbrüche mit geradem Index $K_0, K_2, K_4, \cdots$ eine steigende, jene mit ungeradem Index $K_1, K_3, K_5, \cdots$ eine fallende Folge von Zahlen.

Nach der Formel (VI) ist ferner

$$K_{2r} < K_{2r+1} \quad \text{und} \quad K_{2r} < K_{2r-1} \quad (r = 1, 2, \cdots).$$

Man hat daher bei geradem n

$$K_0 < K_2 < K_4 < \cdots < K_{n-2} < K_n < K_{n-1} < \cdots < K_3 < K_1, \quad (47)$$

bei ungeradem n

$$K_0 < K_2 < K_4 < \cdots < K_{n-1} < K_n < K_{n-2} < \cdots < K_3 < K_1, \quad (48)$$

d. h. jeder Näherungsbruch mit geradem Index ist kleiner als jeder mit ungeradem und jeder Näherungsbruch (von K_2 angefangen) liegt zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden seiner Vorgänger.

Aus den vorstehenden Relationen ersieht man auch noch, daß sich sowohl die Näherungsbrüche mit geradem als auch jene mit ungeradem Index bei wachsendem Index beständig dem Werte des Kettenbruches K_n nähern. Hier tritt uns also jene Eigenschaft der Näherungsbrüche entgegen, von der dieselben ihren Namen haben.

10. Die regelmäßigen Kettenbrüche.

Sind in einem Kettenbruche die sämtlichen Teilzähler $+1$, die Teilnenner lauter natürliche Zahlen und ist das Anfangsglied eine ganze rationale Zahl, so heißt derselbe ein regelmäßiger, auch gewöhnlicher oder einfacher oder natürlicher Kettenbruch. Ein solcher hat also die Gestalt

$$K_n \equiv b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n};$$

er gehört zu der in der vorigen Nummer betrachteten Klasse von

Kettenbrüchen und besitzt daher die dort vorgeführten Eigenschaften. Außerdem gelten für einen solchen Kettenbruch noch die folgenden Sätze:

1) „Die Nenner N_p der Näherungsbrüche sind natürliche Zahlen, die mit dem Index p zugleich wachsen. Dasselbe gilt von den Zählern Z_p derselben, falls b_0 nicht negativ ist. Wenn jedoch b_0 negativ ist, so sind die Z_p $(p \geqq 2)$ negative ganze Zahlen, deren absolute Beträge mit p zugleich zunehmen."

Dieser Satz folgt unmittelbar aus den Beziehungen

$$Z_p = Z_{p-2} + b_p Z_{p-1}, \quad N_p = N_{p-2} + b_p N_{p-1}, \tag{49}$$

in die die Formeln (II) im vorliegenden Falle übergehen. Ist $b_0 < 0$, so ist $Z_0 = b_0 < 0$ und $Z_1 = 1 + b_0 b_1 \leqq 0$, und somit sind zufolge der Gleichungen (49) alle übrigen Z_p negativ.

2) Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind zueinander teilerfremd.

Wegen $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ ist nämlich nach der Formel (V)

$$Z_p N_{p-1} - N_p Z_{p-1} = (-1)^{p-1},$$

woraus folgt, daß Z_p und N_p außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben können.

3) Jeder Näherungsbruch liegt einem späteren Näherungsbruche, also auch dem Werte des Kettenbruches K_n näher als irgend einer seiner Vorgänger.

Der Satz ergibt sich unmittelbar aus der Formel (XI), indem hier $N_k > N_{k-1}$ und gemäß der Relationen (47) oder (48)

$$R_{k+1,k+r} = \frac{1}{b_{k+1}} + \frac{1}{b_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{b_{k+r}} \leqq \frac{1}{b_{k+1}} \leqq 1$$

ist. Man hat also

$$|K_{k+r} - K_k| < |K_{k+r} - K_{k-1}|.$$

4) Die absolute Differenz zwischen dem Kettenbruche K_n und einem seiner Näherungsbrüche K_p ist kleiner als $1 : N_p^2$.

Beweis. Zunächst gewinnt man für $p = n - 1$ aus der Formel (VI) die Beziehung

$$|K_n - K_{n-1}| = \frac{1}{N_{n-1} N_n},$$

so daß nach dem Satze 1)

$$|K_n - K_{n-1}| < \frac{1}{N_{n-1}^2}$$

ist. Wenn dagegen $p < n - 1$ ist, so liegt, wie in der vorigen Nummer gezeigt wurde, K_n zwischen K_p und K_{p+1}. Demnach ist

$$|K_n - K_p| < |K_{p+1} - K_p| = \frac{1}{N_p N_{p+1}} < \frac{1}{N_p^2}.$$

5) Der Nenner b eines jeden zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen K_{p-1} und K_p liegenden gemeinen Bruches $\frac{a}{b}$ ist größer als der Nenner N_p des Näherungsbruches K_p. Dabei ist, wie auch im folgenden Satze, b als positiv vorausgesetzt.

Beweis. Da $\frac{a}{b}$ zwischen K_{p-1} und K_p liegt, so hat man im Hinblicke auf die Formel (VI)

$$0 < \left|\frac{a}{b} - K_{p-1}\right| < \left|K_p - K_{p-1}\right| = \frac{1}{N_{p-1}N_p},$$

woraus sich durch Multiplikation mit $b \cdot N_{p-1}$

$$0 < \left|aN_{p-1} - bZ_{p-1}\right| < b : N_p$$

ergibt. Da hier der mittlere Teil eine natürliche Zahl ist, so muß jedenfalls $b : N_p > 1$, d. i. $b > N_p$ sein.

6) Der Nenner b eines jeden gemeinen Bruches $\frac{a}{b}$, der dem Werte des regelmäßigen Kettenbruches K_n näher liegt als einer von dessen Näherungsbrüchen K_p, ist größer als der Nenner N_p des letzteren.

Denn wie bereits bemerkt wurde, liegt K_n zwischen K_p und K_{p-1} und zwar nach dem Satze 3) näher an K_p als an K_{p-1}. Demnach muß, wenn

$$\left|K_n - \frac{a}{b}\right| < \left|K_n - K_p\right|$$

sein soll, $\frac{a}{b}$ zwischen K_p und K_{p-1} liegen, also gemäß des vorstehenden Satzes $b > N_p$ sein.

7) Zwei regelmäßige Kettenbrüche, deren letzter Teilnenner von 1 verschieden ist, sind nur dann einander gleich, wenn sie identisch sind, d. h. wenn sie in der Anzahl der Glieder und in den gleichvielten Teilnennern miteinander übereinstimmen.

Beweis. Es sei

$$K_n \equiv \left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^n, \quad K'_{n'} \equiv \left[b'_0 + \frac{1}{b'_\nu}\right]_1^{n'}$$

und dabei $b_n > 1$, $b'_{n'} > 1$ und $K_n = K'_{n'}$. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $n' \geqq n$ sei. Setzt man nun

$$R_{m,n} = 1 : K_{m,n} = \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_{m+1}} + \cdots + \frac{1}{b_n} \quad (m = 1, 2, \cdots n),$$

so ist $0 < R_{m,n} < 1$. Haben $R'_{m,n'}$ und $K'_{m,n'}$ die analoge Bedeutung für den Kettenbruch $K'_{n'}$, so ist ebenso $0 < R'_{m,n'} < 1$. Aus

$$0 = K'_{n'} - K_n = b'_0 - b_0 + R'_{1,n'} - R_{1,n}$$

ergibt sich daher

$$|b_0' - b_0| = |R_{1,n'}' - R_{1,n}| < 1,$$

wonach $b_0' = b_0$ sein muß. Demnach ist aber $R_{1,n'}' = R_{1,n}$ und $K_{1,n'}' = K_{1,n}$, woraus man weiter

$$|b_1' - b_1| = |R_{2,n'}' - R_{2,n}| < 1,$$

also $b_1' = b_1$, $R_{2,n'}' = R_{2,n}$ und $K_{2,n'}' = K_{2,n}$ findet. Durch Fortsetzung dieses Schlußverfahrens ergibt sich nach einander für $m = 2, 3, \ldots n-1$

$$b_m' = b_m, \quad R_{m+1,n'}' = R_{m+1,n}, \quad K_{m+1,n'}' = K_{m+1,n}.$$

Man hat also auch

$$b_n = K_{n,n} = K_{n,n'}'. \tag{α}$$

Daraus folgt aber, daß $n' = n$ und $b_n' = b_n$ sein muß. Wäre nämlich $n' > n$, so hätte man

$$b_n' < K_{n,n'}' = b_n' + R_{n+1,n'}' < b_n' + 1,$$

also zufolge (α) $b_n' < b_n < b_n' + 1$, was nicht möglich ist, da b_n' und b_n natürliche Zahlen sind.

Würde man die Bedingung, daß der letzte Teilnenner von K_n' von 1 verschieden sein soll, fallen lassen, so brauchten die beiden Kettenbrüche K_n und K_n' nicht identisch zu sein, sondern es könnte dann auch $n' = n+1$, $b_n' = b_n - 1$ und $b_{n+1}' = 1$ sein.

8) Jede gebrochene rationale Zahl läßt sich stets und zwar nur auf eine einzige Weise in einen regelmäßigen Kettenbruch verwandeln, dessen letzter Teilnenner von 1 verschieden ist.

Beweis: Es sei $\frac{a}{b}$ ein gemeiner Bruch mit positivem Nenner; dann ist durch die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} a = b_0 b + r_1 & (0 < r_1 < b) \\ b = b_1 r_1 + r_2 & (0 < r_2 < r_1) \\ r_1 = b_2 r_2 + r_3 & (0 < r_3 < r_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_{m-1} = b_m r_m + r_{m+1} & (0 < r_{m+1} < r_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\}, \tag{β}$$

worin $b_1, b_2, \ldots b_m, \ldots r_1, r_2, \ldots r_m, r_{m+1}, \ldots$ natürliche Zahlen vorstellen, während b_0 überhaupt eine ganze rationale Zahl ist, jede dieser Zahlen vollkommen bestimmt. Da darin die Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_m, r_{m+1}, \ldots$ mit wachsendem Zeiger beständig abnehmen, so muß eine von ihnen die letzte sein, d. h. man muß schließlich auf einen Zeiger n stoßen, wofür

$$r_{n-1} = b_n r_n \tag{γ}$$

ist. Hierin ist wegen $r_{n-1} > r_n$ $b_n > 1$ und man hat zufolge der Relationen (β), zu denen als deren letzte auch (γ) gehört,

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}. \tag{50}$$

Daß diese Verwandlung von $\frac{a}{b}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch nur in einer einzigen Weise möglich ist, sagt schon Satz 7).

Gemäß des Satzes 6) stellt jeder Näherungsbruch $K_m = Z_m : N_m$ des auf der rechten Seite der Gleichung (50) stehenden Kettenbruches den Wert des Bruches $\frac{a}{b}$ genauer dar als jeder andere Bruch, dessen Nenner nicht größer ist als N_m.[1]) Zufolge dieser Eigenschaft wurden namentlich in früheren Zeiten die regelmäßigen Kettenbrüche dazu verwendet, um einen Bruch oder ein Verhältnis aus großen Zahlen durch kleinere Zahlen möglichst genau auszudrücken.[2]) Heutzutage bedient man sich zur angenäherten Darstellung solcher Brüche im allgemeinen lieber der abgekürzten Dezimalbrüche.

11. Kettenbrüche mit positiven Teilnennern und negativen Teilzählern.

Ähnliche Eigenschaften, wie wir sie an den zuletzt betrachteten, aus positiven Zahlen gebildeten Kettenbrüchen wahrgenommen haben, trifft man nur noch bei solchen Kettenbrüchen an, deren Teilnenner positiv und deren Teilzähler negativ sind, aber auch bei diesen nur dann, wenn die Teilnenner noch die im nächsten Satze ausgesprochenen Bedingungen erfüllen. Ein Kettenbruch dieser Art kann stets in der Form

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \cdots - \frac{a_n}{b_n}$$

angeschrieben werden, worin jetzt die Zahlen $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$ sämtlich positiv sind, während b_0 eine beliebige Zahl vorstellen kann. Es genügt indessen an seiner Stelle den Kettenbruch

$$K_n \equiv \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \cdots - \frac{a_n}{b_n}, \tag{51}$$

für den die zwischen den Näherungsbrüchen stattfindenden Beziehungen eine besonders einfache Gestalt annehmen, ins Auge zu fassen; denn

---

1) Huygens, Opuscula posthuma II (Descriptio Automati planetarii) (1728), S. 175.

2) Mit dieser Aufgabe hat sich Daniel Schwenter, welcher auch die heute noch gebräuchlichen Regeln zur Berechnung der Näherungsbrüche eines regelmäßigen Kettenbruches im wesentlichen aufstellte, schon in der ersten Hälfte des 17. Jahrh. befaßt. Vgl. S. Günther a. in Nr. 3 a. O. S. 1.

zu jedem Näherungsbruche K_r des letzteren ist offenbar $b_0 - K_r$ der entsprechende des ersteren. Der letztere hat nun folgende Eigenschaften.

Satz 1: Ist in dem Kettenbruche K_n von der Form (51)

$$b_1 > 1 \quad \text{und} \quad b_r \geqq a_r + 1 \quad (r = 2, 3, \cdots n), \tag{52}$$

so sind die Zähler Z_r und Nenner N_r sowie die Näherungsbrüche K_r selbst für $r = 1, 2, \ldots n$ sämtlich positiv und nehmen mit dem Index zugleich zu.[1]) K_n ist daher stets ein eigentlicher Kettenbruch (S. 481).

Beweis. Man hat zunächst $Z_0 = 0$ und $Z_1 = a_1 > 0$; ferner zufolge der ersten Formel (II)

$$Z_r = b_r Z_{r-1} - a_r Z_{r-2} = (b_r - a_r) Z_{r-1} + a_r (Z_{r-1} - Z_{r-2}) \quad (r = 2, 3, \cdots n),$$

woraus sich auf Grund der Voraussetzungen (52) nacheinander $Z_2 > Z_1$, $Z_3 > Z_2, \ldots Z_n > Z_{n-1}$ ergibt. In derselben Weise leitet man aus $N_1 = 1$ und $N_1 = b_1 > N_0$ mit Hilfe der zweiten Formel (II) die Beziehungen

$$N_r > N_{r-1} \quad (r = 1, 2, \cdots n)$$

her. Endlich liefert die Formel (VI), da die Nenner N_r sämtlich positiv sind, noch die Relationen

$$K_r - K_{r-1} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{N_{r-1} N_r} > 0, \quad \text{d. i.} \quad K_r > K_{r-1} \quad (r = 1, 2, \cdots n).$$

Zufolge dieses Satzes nähern sich die Zahlen $K_0, K_1, K_2, \ldots K_{n-1}$ mit dem Index zugleich wachsend dem Werte des Kettenbruches K_n. Um auch eine Folge von Zahlen zu erhalten, welche sich demselben Werte fallend nähern, hat Stern den Näherungsbrüchen von K_n die Kettenbrüche

$$K_r' \equiv \frac{a_1}{b_1} \dotplus \frac{a_2}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} \dotplus \frac{a_r}{b_r - 1} \quad (r = 1, 2, \ldots n) \tag{53}$$

zur Seite gestellt und dieselben als mittelbare Näherungsbrüche bezeichnet.[2]) Für diese gilt der Satz:

---

1) Vgl. Stern, Journal f. Math. X (1833), S. 367 u. 368.

2) Stern, am zuletzt a. O. S. 368. Dieselben bilden einen besonderen Fall der sogenannten eingeschalteten oder Nebennäherungsbrüche. Als Nebennäherungsbrüche von $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ werden die Kettenbrüche

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} \dotplus \frac{a_r}{b_r - k} \quad (r \leqq n;\ k = 1, 2, \cdots;\ k < b_r)$$

bezeichnet, welche aber gewöhnlich nur bei regelmäßigen Kettenbrüchen gebraucht werden. Lagrange, Oeuvres II, S. 568, nennt die letzteren fractions sécondaires oder intermédiaires. Näheres über dieselben findet man bei Serret, Handbuch d. höh. Algebra (deutsch v. Wertheim) I. Bd. 2. Aufl. (1878), S. 18 u. d. f.

Satz 2. Erfüllen die Teilnenner des Kettenbruches (51) die Bedingungen (52), so ist simultan mit $b_{r+1} \geqq a_{r+1} + 1$

$$K'_{r+1} \leqq K'_r \quad (r = 1, 2, \cdots n-1);$$

die mittelbaren Näherungsbrüche nehmen also mit wachsendem Index niemals zu. Außerdem ist stets

$$K'_r - K_r = \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{N_r(N_r - N_{r-1})} \quad (r = 1, 2, \cdots n). \tag{54}$$

Beweis. Gemäß der Formeln (II) hat man zunächst für $r \geqq 2$

$$K'_r = \frac{(b_r - 1)Z_{r-1} - a_r Z_{r-2}}{(b_r - 1)N_{r-1} - a_r N_{r-2}} = \frac{Z_r - Z_{r-1}}{N_r - N_{r-1}}. \tag{α}$$

Dieses Resultat ist aber, wie man leicht direkt erkennt, auch noch für $r = 1$ richtig. Ebenso erhält man

$$K'_{r+1} = \frac{(b_{r+1} - 1)Z_r - a_{r+1}Z_{r-1}}{(b_{r+1} - 1)N_r - a_{r+1}N_{r-1}} \tag{β}$$

und hierauf aus (α) und (β)

$$K'_r - K'_{r+1} = \frac{(Z_r N_{r-1} - N_r Z_{r-1})(b_{r+1} - a_{r+1} - 1)}{(N_{r+1} - N_r)(N_r - N_{r-1})}.$$

Die Gleichung kann man aber mit Hilfe der Formel (V) auf die Gestalt

$$K'_r - K'_{r+1} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_r (b_{r+1} - a_{r+1} - 1)}{(N_{r+1} - N_r)(N_r - N_{r-1})}$$

bringen, welche uns, da nach dem 1. Satze die Nenner N_r mit wachsendem r beständig zunehmen, die mit $b_{r+1} \geqq a_{r+1} + 1$ simultanen Beziehungen $K'_{r+1} \leqq K'_r$ liefert. Im Hinblicke auf (α) hat man endlich noch

$$K'_r - K_r = \frac{Z_r - Z_{r-1}}{N_r - N_{r-1}} - \frac{Z_r}{N_r} = \frac{Z_r N_{r-1} - N_r Z_{r-1}}{N_r(N_r - N_{r-1})} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{N_r(N_r - N_{r-1})},$$

womit auch der Zusatz (54) nachgewiesen ist.

Satz 3. „Ist in dem Kettenbruche (51) $b_r \geqq a_r + 1$ für $r = 1, 2, \ldots n$, so ist sein Wert positiv und kleiner als 1." Denn es ist

$$0 < \frac{a_1}{b_1} = K_1 < K_n < K'_n \leqq K'_1 = \frac{a_1}{b_1 - 1} \leqq 1, \text{ also } 0 < K_n < 1.$$

12. Die reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche.

Unter den zuletzt betrachteten Kettenbrüchen verdient eine Klasse noch besonders hervorgehoben zu werden. Es sind dies die Kettenbrüche von der Form

$$K_n \equiv b_0 - \frac{1}{b_1} \dot{-} \frac{1}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{1}{b_n}, \tag{55}$$

worin die Teilnenner $b_1, b_2, \ldots b_n$ natürliche Zahlen mit Ausschluß der Einheit 1 vorstellen, während b_0 eine beliebige ganze rationale Zahl sein kann. In ihren Eigenschaften erweisen sie sich fast ebenso einfach wie die regelmäßigen Kettenbrüche, mit denen sie überhaupt in mancher Beziehung übereinstimmen. Pringsheim nennt sie deshalb reduziert-regelmäßige Kettenbrüche.[1]) Es bestehen bezüglich derselben die folgenden Sätze:

1) „Die Nenner N_r der Näherungsbrüche sind natürliche Zahlen, die mit dem Index r zugleich wachsen. Dasselbe gilt im allgemeinen auch von den absoluten Beträgen ihrer Zähler Z_r; nur wenn $b_0 = 1$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 2$ $(1 \leqq p \leqq n)$ ist, hat man $Z_0 = Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_p = 1$. Die Zähler Z_r selbst sind positiv oder negativ, je nachdem b_0 positiv ist oder nicht."

Beweis. Nach den über den Kettenbruch (55) getroffenen Voraussetzungen ist es selbstverständlich, daß sowohl die Z_r als auch die N_r ganze rationale Zahlen sein werden. Somit erscheint die im vorliegenden Satze ausgesprochene Eigenschaft der Nenner N_r als eine unmittelbare Folge des 1. Satzes der vorigen Nummer. Bezüglich der Zähler Z_r hat man zunächst $Z_0 = b_0$ und $Z_1 = b_0 b_1 - 1$. Bei der Annahme $b_0 > 0$ ist demnach $Z_0 > 0$ und $Z_1 \geqq Z_0$, worin das Gleichheitszeichen nur dann zur Geltung kommt, wenn $b_0 = 1$ und $b_1 = 2$ ist. Ferner hat man nach der ersten Formel (II) für $r \geqq 2$

$$Z_r = b_r Z_{r-1} - Z_{r-2} = (b_r - 1) Z_{r-1} + (Z_{r-1} - Z_{r-2}). \qquad (\alpha)$$

Wenn daher $Z_{r-1} > Z_{r-2} > 0$ ist, so ist sicher auch $Z_r > Z_{r-1}$, und dies trifft bei positivem b_0 stets zu, wenn nicht $b_0 = 1$ und zugleich $b_1 = 2$ ist. Ist aber $b_0 = 1$ und $b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 2$, so hat man $Z_0 = Z_1 = 1$ und zufolge der Gleichung (α) auch

$$Z_2 = 1, \; Z_3 = 1, \cdots Z_{p-1} = 1, \; Z_p = 1.$$

Dagegen findet man, falls hier $p < n$ und $b_{p+1} > 2$ ist, $Z_{p+1} > Z_p$ und allgemein $Z_{p+r} > Z_{p+r-1}$ für $r = 1, 2, \ldots n - p$. — Ist $b_0 \leqq 0$, so hat man zunächst $Z_0 = b_0 \leqq 0$ und $Z_1 < Z_0$, worauf sich aus (α) allgemein $Z_r < Z_{r-1}$ ergibt. Die Zähler Z_r sind also mindestens von Z_1 angefangen negativ und dabei $|Z_r| > |Z_{r-1}|$.

2) „Zähler und Nenner eines jeden Näherungsbruches sind zueinander teilerfremd." — Dies folgt unmittelbar aus der Formel (V).

3) Die gewöhnlichen Näherungsbrüche K_r nehmen bei wachsendem Index beständig ab; hingegen nehmen die mittelbaren Näherungsbrüche $K_1', K_2', \ldots K_n'$ niemals ab, sondern es ist mit $b_r \geqq 2$ zugleich $K_r' \geqq K_{r-1}'$. Jedes K_r' ist kleiner als das zugehörige K_r und es bestehen die Gleichungen

1) Pringsheim, Encyklopädie I. S. 126. Über diese Bezeichnung vgl. S. 485.

$$K_r - K_r' = \frac{1}{N_r(N_r - N_{r-1})} \quad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{56}$$

Die hier ausgesprochenen Eigenschaften der gewöhnlichen und der mittelbaren Näherungsbrüche ergeben sich aus dem 1. und 2. Satze der vorigen Nummer, indem man dort K_r durch $b_0 - K_r$ und K_r' durch $b_0 - K_r'$ ersetzt und beachtet, daß jetzt

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$$

ist.

4) „Es ist sets

$$0 < K_r - K_n < \frac{1}{N_r(N_r - N_{r-1})} \quad (r = 1, 2, \cdots, n-1)\text{“}. \tag{57}$$

Gemäß des Satzes 3) ist nämlich $K_r > K_n$ und

$$K_r' \leqq K_n' < K_n, \quad \text{also} \quad 0 < K_r - K_n < K_r - K_r',$$

woraus man mit Rücksicht auf (56) unmittelbar die Beziehung (57) erhält.

5) „Der Nenner b eines jeden zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen K_{m-1} und K_m liegenden gemeinen Bruches $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$ ist größer als N_m.“ — Der Beweis dieses Satzes kann ähnlich geführt werden wie bei dem ihm entsprechenden Satze 5) in Nr. 10.

6) „Zwei reduziert-regelmäßige Kettenbrüche sind nur dann einander gleich, wenn sie identisch sind.“ — Dies kann auf Grund des 3. Satzes in Nr. 11 in ähnlicher Weise gezeigt werden wie der analoge Satz 7) in Nr. 10.

7) Jede gebrochene rationale Zahl läßt sich stets und zwar nur auf eine einzige Art in einen reduziert-regelmäßigen Kettenbruch verwandeln.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ ein gemeiner Bruch mit positivem Nenner. Bedeutet dann b_0 eine ganze rationale Zahl, während die Werte von $b_1, b_2, b_3, \ldots, r_1, r_2, r_3, \ldots$ auf natürliche Zahlen beschränkt sein sollen, so sind diese Zahlen durch die Relationen

$$\begin{aligned}
a &= b_0 b - r_1 \quad (0 < r_1 < b)\\
b &= b_1 r_1 - r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)\\
r_1 &= b_2 r_2 - r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{m-1} &= b_m r_m - r_{m+1} \quad (0 < r_{m+1} < r_m)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

vollkommen bestimmt. Zugleich ist jede der Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ größer als 1 und die Reihe dieser Relationen bricht sicher

einmal ab, indem man schließlich auf einen Zeiger n stoßen muß, wofür $r_{n-1} = b_n r_n$ ist. Somit hat man

$$\frac{a}{b} = b_0 - \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} - \cdots - \frac{1}{b_n}.$$

Daß es nur eine einzige solche Kettenbruchentwicklung für $\frac{a}{b}$ geben kann, verbürgt der Satz 6).[1])

13. Aufsteigende Kettenbrüche.

Außer den bisher behandelten, absteigenden Kettenbrüchen findet man in mathematischen Werken bisweilen noch eine diesen ähnliche Art von Ausdrücken, die sogenannten aufsteigenden Kettenbrüche der Betrachtung unterzogen. Die letzteren haben die Gestalt

$$K^{(n)} \equiv \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{oder eigentlich:} \quad \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2 + \cdots + \frac{a_n}{b_n}}{b_2}}, \tag{1}$$

aus welch letzterer Schreibweise die Bedeutung eines solchen Kettenbruches unmittelbar erhellt. Setzt man demnach

$$x_{n-1} = \frac{a_n}{b_n},\ x_{n-2} = \frac{a_{n-1} + x_{n-1}}{b_{n-1}},\ \cdots,\ x_2 = \frac{a_2 + x_2}{b_2},\ x_1 = \frac{a_1 + x_2}{b_2}, \tag{2}$$

so ist

$$K^{(n)} = \frac{a_1 + x_1}{b_1}. \tag{3}$$

Auch hier nennt man die Quotienten $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ die Glieder oder Teilbrüche, $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Teilzähler und $b_1, b_2, \ldots b_n$ die Teilnenner des Kettenbruches $K^{(n)}$, und es ist nach den Gleichungen (2) und (3) sofort klar, daß der Ausdruck $K^{(n)}$ dann und nur dann einen Sinn hat, wenn die sämtlichen Teilnenner von Null verschieden sind, während im übrigen sowohl die Teilzähler als auch die Teilnenner beliebige reelle und komplexe Zahlen vorstellen dürfen.

Statt des Ausdruckes (1) werden wir uns im folgenden der Kürze wegen des Symbols $\left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n$ zur Darstellung des Kettenbruches $K^{(n)}$ bedienen.[2]) Es sind dann durch die identischen Gleichungen

1) Von den aus lauter reellen Zahlen gebildeten Kettenbrüchen sind außer den hier in den Nummern 9—12 vorgeführten noch jene, welche sich bei Entwicklung einer reellen Größe in einen Kettenbruch nach nächsten Ganzen ergeben, von A. Hurwitz (Acta mathematica 12 (1889), S. 367 u. d. f.) zum Gegenstand besonderer Untersuchung genommen worden.

2) Nach Pringsheim, Encyklopädie I, S. 140.

$$K^{(r)} \equiv \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^r \quad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

die **Näherungsbrüche** von $K^{(n)}$ definiert. Denkt man sich einen solchen Näherungsbruch $K^{(r)}$ durch bloße Anwendung der Regel

$$\frac{a + \frac{c}{d}}{b} = \frac{ad + c}{bd},$$

welche jedoch beliebig oft wiederholt werden darf, ohne irgend welche sonstige Reduktion auf die Form eines einfachen Bruches

$$K^{(r)} = \frac{Z^{(r)}}{N^{(r)}} \tag{5}$$

gebracht, so heißt $Z^{(r)}$ der r^{te} **Näherungszähler**, $N^{(r)}$ der r^{te} **Näherungsnenner**. Für diese Größen findet man aus (1) zunächst

$$Z^{(1)} = a_1, \quad N^{(1)} = b_1, \quad Z^{(2)} = a_1 b_2 + a_2 = b_2 Z^{(1)} + a_2, \quad N^{(2)} = b_1 b_2.$$

Angenommen nun es sei für einen bestimmten Wert von $r\ (= m)$

$$Z^{(m)} = b_m Z^{(m-1)} + a_m, \quad N^{(m)} = b_1 b_2 \cdots b_m,$$

was jedenfalls für $m = 2$ richtig ist, so hat man

$$K^{(m)} = \frac{Z^{(m)}}{N^{(m)}} = \frac{b_m Z^{(m-1)} + a_m}{b_1 b_2 \cdots b_m}$$

und daher

$$K^{(m+1)} = \frac{b_m Z^{(m-1)} + a_m + a_{m+1} : b_{m+1}}{b_1 b_2 \cdots b_m} = \frac{b_{m+1} Z^{(m)} + a_{m+1}}{b_1 b_2 \cdots b_m b_{m+1}},$$

also

$$Z^{(m+1)} = b_{m+1} Z^{(m)} + a_{m+1}, \quad N_{m+1} = b_1 b_2 \cdots b_{m+1}.$$

Demnach ist allgemein

$$Z^{(r)} = b_r Z^{(r-1)} + a_r, \quad N^{(r)} = b_1 b_2 \cdots b_r \quad (r = 1, 2, \cdots n)^1), \tag{6}$$

wobei man unter $Z^{(0)}$ die Zahl Null zu verstehen hat. Es lassen sich also die Näherungsnenner direkt angeben, während die Näherungszähler durch eine ähnliche Rekursionsformel gewonnen werden wie die gleichnamigen Größen bei den absteigenden Kettenbrüchen.

Zufolge der Formeln (6) ist nun

$$K^{(r)} = \frac{Z^{(r)}}{N^{(r)}} = \frac{Z^{(r-1)}}{N^{(r-1)}} + \frac{a_r}{b_1 b_2 \cdots b_r} \quad (r = 2, 3, \cdots n)$$

1) Vgl. Günther, Darstellung usw. S. 42. Daselbst gibt Günther auch eine independente Darstellung des r^{ten} Näherungszählers in Form einer Determinante.

und durch Addition dieser $n-1$ Gleichungen erhält man die Gleichung

$$K^{(n)} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_3}{b_1 b_2 b_3} + \cdots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}. \tag{7}$$

Dadurch erscheint der aufsteigende Kettenbruch $K^{(n)}$ in eine äquivalente Reihe verwandelt, deren Glieder mit jenen des Kettenbruches in einem sehr einfachen Zusammenhang stehen, so daß die Reihe den Kettenbruch in allen Fällen ersetzen kann, indem sich aus der Reihe (7) auch alle weiteren Eigenschaften des aufsteigenden Kettenbruches ableiten lassen. So kann man der Gleichung (7) die Gestalt verleihen

$$K^{(n)} = \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2}{c_1 b_1 \cdot c_2 b_2} + \cdots + \frac{c_1 c_2 \cdots c_n a_n}{c_1 b_1 \cdot c_2 b_2 \cdots c_n b_n} = \left\{\frac{c_1 c_2 \cdots c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right\}_1^n,$$

worin die $c_1, c_2, \ldots c_n$ beliebige von Null verschiedene Zahlen bedeuten können, und man erfährt dadurch, daß die beiden Kettenbrüche

$$\left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n \quad \text{und} \quad \left\{\frac{c_1 c_2 \cdots c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right\}_1^n \tag{8}$$

einander äquivalent sind.

Auf Grund dessen gibt es zu einem jeden aufsteigenden Kettenbruche $K^{(n)}$, dessen sämtliche Teilzähler von Null verschieden sind, einen ihm äquivalenten, worin alle Teilzähler den Wert 1 haben. Ein solcher heißt ein gewöhnlicher aufsteigender Kettenbruch.[1]) Um ihn zu erhalten, bestimme man $c_1, c_2, \ldots c_n$ nacheinander aus den Gleichungen

$$c_1 c_2 \cdots c_r a_r = 1 \quad (r = 1, 2, \cdots n). \tag{9}$$

Ist dann

$$c_r b_r = h_r \quad (r = 1, 2, \cdots n), \tag{10}$$

so hat man

$$K^{(n)} = \left\{\frac{1}{h_\nu}\right\}_1^n = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1 h_2} + \cdots + \frac{1}{h_1 h_2 \cdots h_n}. \tag{11}$$

Der aufsteigende Kettenbruch $\left\{\frac{1}{h_\nu}\right\}_1^n$ läßt sich leicht in einen äquivalenten absteigenden Kettenbruch von der Form

$$K_n \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1} \dotplus \frac{\alpha_2}{\beta_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{\alpha_n}{\beta_n} \tag{12}$$

verwandeln. Hierzu dient die Formel (43) in Nr. 7, welche im vorliegenden Falle die Gestalt

$$K_n = \frac{\alpha_1}{N_1} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{N_1 N_2} + \cdots + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{N_{n-1} N_n} \tag{13}$$

1) Vgl. E. Czuber, Grunerts Archiv LX (1877), S. 268.

annimmt. Zufolge (11) ist nämlich

$$\left\{\frac{1}{h_\nu}\right\}_1^n = \frac{1}{h_1} + \frac{h_1}{h_1 \cdot h_1 h_2} + \frac{h_1 h_2}{h_1 h_2 \cdot h_1 h_2 h_3} + \cdots + \frac{h_1 h_2 \cdots h_{n-1}}{h_1 h_2 \cdots h_{n-1} \cdot h_1 h_2 \cdots h_n} \cdot \quad (14)$$

Um nun die rechten Seiten der Gleichungen (13) und (14) miteinander identisch zu machen, darf man zunächst

$$N_r = h_1 h_2 \cdots h_r \quad (r = 1, 2, \cdots n) \quad (15)$$

setzen, worauf sich dann für die Teilzähler α_r die Werte

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_r = h_{r-1} \quad (r = 2, 3, \cdots n) \quad (16)$$

ergeben. Es ist daher $\beta_1 = N_1 = h_1$, während für die übrigen Teilnenner gemäß der zweiten Formel (II) S. 472 die Gleichungen

$$N_r = \beta_r N_{r-1} - \alpha_r N_{r-2} \quad (r = 2, 3, \cdots n)$$

bestehen, aus denen man mit Hilfe von (15) und (16) die Werte

$$\beta_r = h_r + 1 \quad (r = 2, 3, \cdots n)$$

erhält. Es lautet also der mit $\left\{\frac{1}{h_\nu}\right\}_1^n$ äquivalente Kettenbruch (12)

$$K_n \equiv \frac{1}{h_1} \dfrac{}{+} \frac{h_1}{h_2 + 1} \dfrac{}{+} \frac{h_2}{h_3 + 1} \dfrac{}{+} \cdots \dfrac{}{+} \frac{h_{n-1}}{h_n + 1}.$$

Nach (11) ist nunmehr aber auch

$$K^{(n)} = \frac{1}{h_1} \dfrac{}{+} \frac{h_1}{h_2 + 1} \dfrac{}{+} \frac{h_2}{h_3 + 1} \dfrac{}{+} \cdots \dfrac{}{+} \frac{h_{n-1}}{h_n + 1},$$

also zufolge des 2. Satzes in Nr. 7

$$K^{(n)} = \frac{a_1}{a_1 h_1} \dfrac{}{+} \frac{a_1 a_2 h_1}{a_2 h_2 + a_2} \dfrac{}{+} \frac{a_2 a_3 h_2}{a_3 h_3 + a_3} \dfrac{}{+} \cdots \dfrac{}{+} \frac{a_{n-1} a_n h_{n-1}}{a_n h_n + a_n}. \quad (17)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Größen $h_1, h_2, \ldots h_n$ mit Hilfe der Relationen (9) und (10) entfernen. Nach (10) ist nämlich

$$a_r h_r = c_r a_r b_r \quad (r = 1, 2, \cdots n)$$

und die Gleichungen (9) ergeben

$$c_1 a_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_r a_r = a_{r-1} \quad (r = 2, 3, \cdots n).$$

Demnach ist

$$a_1 h_1 = b_1 \quad \text{und} \quad a_r h_r = a_{r-1} b_r \quad (r = 2, 3, \cdots n).$$

Führt man diese Werte an Stelle der Produkte $a_r h_r$ in die Gleichung (17) ein, so gewinnt dieselbe die Gestalt

$$K^{(n)} = \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2 + a_2} \dot{-} \frac{a_1 a_3 b_2}{a_2 b_3 + a_3} \dot{-} \frac{a_2 a_4 b_3}{a_3 b_4 + a_4} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_{n-2} a_n b_{n-1}}{a_{n-1} b_n + a_n}.^{1)} \quad (18)$$

Nach dieser Formel läßt sich jeder aufsteigende Kettenbruch, welcher keine verschwindende Teilzähler enthält, in einen äquivalenten absteigenden Kettenbruch verwandeln, wodurch der Zusammenhang dieser beiden Arten von Kettenbrüchen klargelegt ist.

1) Vgl. Pringsheim, Encyklopädie I. S. 140.

XI. Abschnitt.

Die unendlichen Kettenbrüche.

1. Allgemeine Erklärungen.

Wenn neben b_0 eine unbegrenzte Folge von Zahlenpaaren $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_n b_n$, gegeben ist, so kann man daraus unendlich viele absteigende Kettenbrüche in der Weise bilden, daß man von $K_0 = b_0$ ausgehend zu jedem Kettenbruche

$$K_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ als neues Endglied hinzufügt. Die so zustande kommende endlose Folge von Kettenbrüchen

$$K_0, K_1, K_2, \cdots K_n, \cdots \tag{2}$$

heißt ein unendlicher Kettenbruch[1]) und wird in der Form

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots, \tag{3}$$

kürzer

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots \quad \text{oder auch} \quad \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

dargestellt. Die endlichen Kettenbrüche (1) sind seine Näherungsbrüche. Die Begriffe: Element, Anfangsglied, Glied oder Teilbruch, Teilzähler und Teilnenner haben für die unendlichen Kettenbrüche den nämlichen Sinn wie für die endlichen.

Die in X, 2 hinsichtlich der endlichen Kettenbrüche getroffene Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Kettenbrüchen läßt sich auch auf die unendlichen Kettenbrüche ausdehnen.

---

1) Genauer: Ein unendlicher absteigender Kettenbruch. In analoger Weise gelangt man zu dem Begriffe eines unendlichen aufsteigenden Kettenbruches. Da jedoch hier nur von den ersteren die Rede sein wird, so genügt die obige gewöhnlich gebrauchte und kürzere Benennung.

Wir bezeichnen einen unendlichen Kettenbruch als einen eigentlichen, wenn sich unter seinen Näherungsbrüchen keine oder doch nur eine endliche Anzahl von uneigentlichen oder sinnlosen Kettenbrüchen vorfindet; dagegen heiße er ein uneigentlicher Kettenbruch, wenn von seinen Näherungsbrüchen, abgesehen von einer endlichen Anzahl derselben, zwar jeder einen Sinn hat, jedoch unbegrenzt viele unter ihnen uneigentliche Kettenbrüche sind. Nun ist aber noch ein dritter Fall möglich, indem von den Näherungsbrüchen auch unendlich viele sinnlos sein können; in diesem Falle möge der Kettenbruch als ein unbestimmter bezeichnet werden.

Daß jeder der drei genannten Fälle auch wirklich eintreten könne, geht schon aus der in X, 6 S. 481 getroffenen Erörterung hervor und läßt sich leicht durch Beispiele erhärten. So kann man aus den in X, 9 vorgeführten Eigenschaften der aus lauter positiven Elementen bestehenden Kettenbrüche unmittelbar folgern, daß jeder solche Kettenbruch ein eigentlicher ist. In dem Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{0} + \frac{a_3}{0} + \cdots + \frac{a_n}{0} + \cdots, \qquad (\alpha)$$

worin b_1 sowie die sämtlichen Teilzähler positive Zahlen bedeuten, während die Teilnenner, vom zweiten angefangen, verschwinden, ist $K_{2r} = 0$ und $K_{2r+1} = a_1 : b_1$ für jeden Wert $r = 0, 1, 2, \ldots$; derselbe ist daher zufolge der obigen Erklärung und des Satzes 4) in X, 6 ein uneigentlicher Kettenbruch; denn nach diesem Satze ist ein unendlicher Kettenbruch, der höchstens eine endliche Anzahl von sinnlosen Näherungsbrüchen enthält, ein eigentlicher oder ein uneigentlicher, je nachdem mindestens von einem bestimmten Gliede der unbegrenzten Folge (2) angefangen jeder folgende Näherungsbruch einen von jedem seiner Vorgänger verschiedenen Wert hat oder nicht. Endlich enthält der Kettenbruch

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{c_1 c_2}{c_2} \cdot \frac{c_2 c_3}{c_3} \cdot \cdots \cdot \frac{c_{n-1} c_n}{c_n} \cdot \cdots, \qquad (\beta)$$

worin $c_1, c_2, \ldots$ von Null verschiedene Zahlen bedeuten, unbegrenzt viele sinnlose Näherungsbrüche, indem $N_{3r+2} = 0$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ ist (vgl. Beispiel 2) in X, 6). Derselbe Kettenbruch (β) enthält aber auch unendlich viele Näherungsbrüche, welche einen Sinn haben; es ist nämlich $K_{3r} = 0$ und $K_{3r+1} = \frac{1}{c_1}$. Diese letztere Erscheinung ist hier nicht bloß zufällig, sondern in dem Satze 3. von X, 6 begründet, nach welchem in einem Kettenbruche, dessen Teilzähler sämtlich von Null verschieden sind, nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche zugleich sinnlos sein können.

Auf Grund dessen können auch solche Kettenbrüche, welche sinnlose Näherungsbrüche in unbegrenzter Anzahl aufweisen, in gewissem Sinne noch als mathematische Objekte behandelt werden, indem man z. B. das Verhalten derjenigen von ihren Näherungsbrüchen, deren Nenner von Null verschieden sind, ins Auge faßt.[1])

1) Vgl. Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. 28 (1898) S. 304.

Gemäß der eingangs von X, 6 gemachten Erörterung sind im folgenden, um überflüssige Unterscheidungen zu vermeiden, die sämtlichen Teilzähler eines jeden Kettenbruches als von Null verschieden vorausgesetzt.

2. Konvergenz und Divergenz der unendlichen Kettenbrüche.

Für die weitere Beurteilung eines unendlichen Kettenbruches ist das Verhalten seiner Näherungsbrüche K_n beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ maßgebend. Dabei sind die folgenden Fälle möglich:

1) K_n hat beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert K. Der Kettenbruch (3) heißt in diesem Falle konvergent und K sein Grenzwert oder auch schlechthin sein Wert. Jeder andere unendliche Kettenbruch, der diese Eigenschaft nicht besitzt, heißt divergent.

2) K_n hat beim nämlichen Grenzübergange einen unendlichen Grenzwert, so daß, falls nur reelle Zahlen zugelassen werden, entweder $\lim K_n = +\infty$ oder $\lim K_n = -\infty$ ist. Der Kettenbruch (3) wird in diesem Falle als eigentlich divergent bezeichnet.

3) K_n hat beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ keinen bestimmten Grenzwert und der Kettenbruch heißt dann uneigentlich divergent. Bei Ausschluß von komplexen Zahlen besitzt K_n in diesem Falle zwei voneinander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen k und g $(k < g)$, wobei die untere k auch $-\infty$, die obere g auch $+\infty$ sein kann. Man sagt dann auch, der unendliche Kettenbruch schwanke oder oszilliere zwischen den Grenzen k und g.

Von dieser Art ist z. B. der Kettenbruch (α) in Nr. 1; derselbe oszilliert zwischen den Grenzen 0 und $\frac{a_1}{b_1}$. Für die ersten beiden Fälle werden sich Beispiele später darbieten; daß diese Fälle aber auch wirklich eintreten können, geht unmittelbar aus der Erörterung in X, 6 S. 481 hervor.

4) K_n wird für unendlich viele Werte von n sinnlos. Der unendliche Kettenbruch ist dann selbstverständlich zu den divergenten zu rechnen, jedoch ist er in dem soeben erörterten Sinne weder eigentlich noch uneigentlich divergent, sondern bildet einen besonderen Fall der Divergenz, den man etwa als unbestimmte Divergenz bezeichnen könnte.

Hierher gehört das obige Beispiel (β), sowie auch jeder unendliche Kettenbruch, dessen Teilnenner mit ungeradem Index sämtlich Null sind; denn für einen solchen ist $N_{2n+1} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Zwei unendliche Kettenbrüche, die dem nämlichen hier verzeichneten Falle entsprechen, bezeichnen wir als gleichartig. Es möge hier noch bemerkt sein, daß, da stets

$$\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = b_0 + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$$

ist, das Anfangsglied b_0 auf die Konvergenz oder Divergenz eines Kettenbruches keinen Einfluß hat. Ebensowenig hat aber auch der erste Teilzähler a_1, wenn derselbe nur von Null verschieden ist, einen solchen Einfluß, indem stets

$$\left[\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^n = a_1 \left[\frac{1}{b_1} + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^n$$

ist.

Die Entscheidung der Frage, ob ein gegebener unendlicher Kettenbruch konvergent oder divergent sei, ist oft mit großen Schwierigkeiten verbunden und es besteht kein Satz, der diese Entscheidung allgemein herbeizuführen imstande wäre. Ein wichtiges Hilfsmittel bei einer derartigen Untersuchung bildet die Verwandlung eines Kettenbruches in einen äquivalenten Ausdruck, und zwar hauptsächlich jene in eine äquivalente Reihe oder in einen äquivalenten Kettenbruch.

Bezüglich der ersteren dieser Transformationen läßt sich aus der Formel (44) in X, 7 unmittelbar schließen, daß der eigentliche oder uneigentliche Kettenbruch

$$K \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \tag{4}$$

mit der unendlichen Reihe

$$\frac{Z_m}{N_m} + \frac{(-1)^m a_1 a_2 \cdots a_{m+1}}{N_m N_{m+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{N_{n-1} N_n} + \cdots \tag{5}$$

äquivalent ist, worin der Index m nur so gewählt zu sein braucht, daß von den Näherungsnennern N_m, N_{m+1}, ... keiner mehr verschwindet. Enthält der Kettenbruch überhaupt keinen verschwindenden Näherungsnenner, so kann man $m = 0$ setzen, wodurch die Reihe (5) in die der Formel (43) in X, 7 entsprechende, mit K äquivalente unendliche Reihe

$$b_0 + \frac{a_1}{N_1} - \frac{a_1 a_2}{N_1 N_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n}{N_{n-1} N_n} + \cdots [1] \tag{6}$$

übergeht. Es läßt sich mithin die Untersuchung über das Verhalten von K_n bei $\lim n = +\infty$ auf jene über das Verhalten einer unendlichen Reihe zurückführen. Im allgemeinen ist durch diese Umformung allein allerdings noch nicht viel erreicht, da die Reihe (5) oder (6) wegen der darin vorkommenden Näherungsnenner N_n von nicht einfacher Gestalt ist. Doch führt dieselbe in einigen wichtigen Fällen

1) Euler, Introductio in Anal. inf. I. § 363.

zum Ziele. Zunächst gewinnt man mittels dieser Transformation das folgende allgemeine Divergenzkriterium:

Satz 1. Der Kettenbruch $\left[h_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty$ ist stets divergent, wenn die Reihe

$$h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n + \cdots$$

absolut konvergiert;[1]) jedoch ist die Divergenz nie eine eigentliche, sondern entweder uneigentlich oder unbestimmt.

Beweis. Falls der Kettenbruch unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche enthält, ist der Satz selbstverständlich. Wir dürfen daher annehmen, daß mindestens von einer bestimmten Stelle $n = m$ an, die sämtlichen Näherungsnenner N_n von Null verschieden seien. Der Kettenbruch ist dann zufolge (5) mit der Reihe

$$\frac{Z_m}{N_m} + (-1)^m \left\{\frac{1}{N_m N_{m+1}} - \frac{1}{N_{m+1} N_{m+2}} + \cdots\right\} \tag{7}$$

äquivalent. Da nun in unserem Falle das unendliche Produkt

$$\prod_1^\infty (1 + |h_r|)$$

konvergiert und, wie man leicht findet,

$$|N_n| \leqq \prod_1^n (1 + |h_r|) < \prod_1^\infty (1 + |h_r|)$$

ist, so divergiert die Reihe (7) und somit auch der Kettenbruch $\left[h_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty$. Daß die Divergenz keine eigentliche sein kann, ergibt sich indireckt. Wäre sie nämlich eigentlich, also $\lim K_n = \infty$, so hätte man $\lim (1 : K_n) = 0$; es müßte demnach der Kettenbruch

$$\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \cdots + \frac{1}{h_n} + \cdots$$

zur Null konvergieren, was jedoch nicht möglich ist, da die Reihe

$$h_0 + h_1 + h_2 + \cdots$$

absolut konvergiert.[2])

Als Beispiel hierfür kann der Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n} + \cdots$$

---

1) Vgl. Stolz, Vorlesungen über allgem. Arithmetik II, S. 279.

2) Denselben Schluß kann man auch dann noch machen, wenn zwar K_n selbst keinen (auch keinen unendlichen) Grenzwert hat, aber $\lim |K_n| = +\infty$ ist.

dienen, der stets divergiert, wenn $0 \leqq |x| < 1$ ist. Für $x = 0$ sind seine Näherungsbrüche abwechselnd $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{0}$.

Hinsichtlich der Äquivalenz zweier unendlicher Kettenbrüche kann man zunächst bemerken, daß der Satz 1 in X, 7 samt seinem Beweise auch für unendliche Kettenbrüche gültig bleibt, wobei eine Abänderung nur insofern einzutreten hat, als jetzt die Anzahl der Glieder nicht mehr eine endliche Zahl n, sondern unendlich ist. Auch ist sofort klar, daß der Kettenbruch (4) mit dem Kettenbruche

$$b_0 + \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2} + \cdots + \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n} + \cdots, \tag{8}$$

worin die $c_1, c_2, \ldots$ sämtlich von Null verschieden sind, äquivalent ist. Denn bezeichnet man Zähler und Nenner des r^{ten} Näherungsbruches von (8) mit Z_r', beziehungsweise N_r', so finden die am erwähnten Orte angegebenen Relationen

$$Z_r' = c_1 c_2 \cdots c_r Z_r, \quad N_r' = c_1 c_2 \cdots c_r N_r$$

nunmehr für jeden Wert $r = 1, 2, 3, \ldots$ statt. Endlich läßt sich noch in derselben Weise wie dort nachweisen, daß jeder mit (4) äquivalente Kettenbruch in der Form (8) enthalten ist.

Der Vorteil, den die Transformation eines Kettenbruches in einen äquivalenten bei Konvergenzuntersuchungen darbietet, besteht darin, daß sie die Untersuchung auf jene gewisser Grundtypen von Kettenbrüchen zurückzuführen gestattet, aus deren Verhalten man dann leicht auf die Eigenschaften des ursprünglich vorgelegten Kettenbruches zurückschließen kann. Solche Grundtypen sind z. B. die Hauptform $\left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$, die reduzierte Form $\left[b_0 - \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und die alternierende Form $\left[b_0 + \frac{(-1)^\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

Diese drei Formen haben das mit einander gemein, daß in ihnen die sämtlichen Teilzähler auf die reellen Einheiten $+1$ und -1 reduziert erscheinen. Dieselbe Reduktion kann man aber auch bezüglich der Nenner des Kettenbruches (4) vornehmen, vorausgesetzt, daß diese Teilnenner sämtlich von Null verschieden sind. Reduziert man dieselben auf $+1$, so erhält man eine zweite Art von Grundtypen $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, $\left[b_0 - \frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ und $\left[b_0 + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, die manchmal ebenso große Dienste leisten als die Grundtypen der ersten Art.

Da sich jeder unendliche Kettenbruch (der keinen verschwindenden Teilzähler enthält) auf die Hauptform bringen läßt, so können wir jetzt den Satz 1. in allgemeinerer Form darstellen. Der mit $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$

äquivalente Kettenbruch (8) wird zur Hauptform $\left[b_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty$ des ersteren, wenn wir gemäß der Formeln (37) in X, 7

$$c_1 = \frac{1}{a_1},\ c_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}},\ c_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k+1}} (k = 1, 2, 3, \cdots) \quad (9)$$

setzen, und es ist dann

$$h_1 = \frac{b_1}{a_1},\ h_{2k} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2k}} b_{2k},$$
$$h_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2k}}{a_1 a_3 \cdots a_{2k-1}} \cdot \frac{b_{2k+1}}{a_{2k+1}} \quad (k = 1, 2, \cdots). \quad (10)$$

Weil nun die Reihe Σh_r absolut konvergiert, wenn dieses für jede der beiden Reihen Σh_{2k} und Σh_{2k+1} zutrifft, so ergibt sich aus dem Satze 1. unmittelbar der folgende:

Satz 2. Der Kettenbruch $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ divergiert und zwar entweder uneigentlich oder unbestimmt, wenn jede der beiden Reihen

$$\sum_1^\infty \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2r-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2r}} b_{2r}, \quad \sum_1^\infty \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2r}}{a_1 a_3 \cdots a_{2r-1}} \cdot \frac{b_{2r+1}}{a_{2r+1}} \quad (11)$$

absolut konvergiert.[1])

Der Quotient aus einem Gliede und dem ihm unmittelbar vorausgehenden hat in beiden Reihen (11) die einfache Gestalt

$$\frac{a_{s+1} b_{s+2}}{a_{s+2} b_s},$$

so daß sich zur Beurteilung dieser Reihen im allgemeinen die Konvergenzkriterien zweiter Art (VI, 8 — 10) anwenden lassen werden. Auf diese Weise findet man z. B. leicht, daß der Kettenbruch

$$a + \frac{\varepsilon_1 x}{a} \dot{+} \frac{\varepsilon_2 x^2}{a} \dot{+} \frac{\varepsilon_3 x^3}{a} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\varepsilon_n x^n}{a} \dot{+} \cdots,$$

worin die ε_n unabhängig voneinander eine der reellen Einheiten $+1$ oder -1 bedeuten, divergiert, wenn $|x| > 1$ ist.

3. Unendliche Kettenbrüche aus lauter positiven Elementen.

Um weitere Sätze über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Kettenbrüchen zu gewinnen, ist es nötig, einzelne Klassen

1) Vgl. Pringsheim, Encyklopädie I. S. 128.

derselben gesondert zu betrachten. Am einfachsten liegt die Sache bei den Kettenbrüchen $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, die mit etwaiger Ausnahme des Anfangsgliedes aus lauter positiven Elementen bestehen. Das Anfangsglied setzen wir der leichteren Formulierung des Folgenden wegen als reell voraus. Aus X, 9 folgt unmittelbar, daß jeder solche Kettenbruch ein eigentlicher ist, da ja jeder seiner Näherungsbrüche diese Eigenschaft besitzt. Ferner ist nach den dortigen Ergebnissen ein solcher Kettenbruch entweder konvergent oder er oszilliert zwischen zwei endlichen Grenzen. Im Falle der Konvergenz liegt der Wert des Kettenbruches zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen, er ist also größer als jeder Näherungsbruch mit geradem, und kleiner als jeder mit ungeradem Index. Dasselbe gilt im Falle der Oszillation für die beiden Unbestimmtheitsgrenzen. Welcher von diesen beiden Fällen aber bei einem vorgelegten Kettenbruche dieser Art zutreffe, läßt sich stets mittels einer allgemeinen Regel entscheiden. Indem wir uns zunächst auf die Hauptform beschränken, lautet dieselbe:

Satz 1.[1]) Der unendliche Kettenbruch

$$h_0 + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \cdots + \frac{1}{h_n} + \cdots \tag{1}$$

konvergiert oder schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen, je nachdem die unendliche Reihe

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n + \cdots \tag{2}$$

divergiert oder konvergiert, oder, was auf dasselbe hinauskommt, je nachdem von den beiden Reihen

$$h_1 + h_3 + \cdots + h_{2n+1} + \cdots \quad \text{und} \quad h_2 + h_4 + \cdots + h_{2n} + \cdots \tag{3}$$

mindestens eine oder keine divergiert.

Beweis. Da nach X, 9 die Näherungsbrüche von (1) mit geradem Zeiger (K_{2r}) eine steigende, jene mit ungeradem Zeiger (K_{2r+1}) dagegen eine fallende Folge von Zahlen bilden und dabei $K_{2r} < K_{2r+1}$ ist, so hat sowohl K_{2r} als auch K_{2r+1} bei $\lim r = +\infty$ einen endlichen Grenzwert und der Kettenbruch (1) konvergiert oder schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen, je nachdem diese beiden Grenzwerte einander gleich sind oder nicht. Nun ergibt sich aus der Formel (VI) in X, 5 mit Rücksicht auf den vorliegenden Kettenbruch (1)

$$K_{2r+1} - K_{2r} = \frac{1}{N_{2r} N_{2r+1}};$$

1) Dieser Satz wurde von L. Seidel [vgl. Abhandl. d. bayer. Ak. Bd. VII (1855), S. 562] und M. A. Stern [Journal f. Math. Bd. 37 (1848), S. 269] gefunden.

somit ist der Kettenbruch dann und nur dann konvergent, wenn

$$\lim_{r=+\infty} N_{2r}N_{2r+1} = +\infty \tag{4}$$

ist. Da aber

$$N_0 = 1, \quad N_1 = h_1, \quad N_n = N_{n-2} + h_n N_{n-1} \quad (n \geqq 2), \tag{5}$$

also $N_n > N_{n-2} > 0$ ist, so nehmen sowohl die N_{2r} als auch die N_{2r+1} mit wachsendem r beständig zu; die Bedingung (4) ist demnach erfüllt, wenn auch nur die eine der beiden Veränderlichen N_{2r} und N_{2r+1} bei $\lim r = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ hat. Zufolge (5) ist nun $N_{2r} > 1$ $(r > 0)$ und man findet nacheinander

$$N_3 = N_1 + h_3 N_2 > h_1 + h_3$$
$$N_5 = N_3 + h_5 N_4 > h_1 + h_3 + h_5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

allgemein

$$N_{2r+1} > h_1 + h_3 + h_5 + \cdots + h_{2r+1} \quad (r \geqq 1).$$

Demnach ist die Bedingung (4) erfüllt und somit der Kettenbruch (1) konvergent, falls die erste Reihe (3) divergiert. Aus demselben Grunde muß aber auch der Kettenbruch

$$h_1 + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} + \cdots$$

konvergieren, wenn die zweite Reihe (3) divergiert, und da dann sein Grenzwert eine endliche positive Zahl K' ist, so hat man

$$\left[h_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty = h_0 + \frac{1}{K'},$$

d. h. es konvergiert auch der Kettenbruch (1). Der letztere ist also stets konvergent, wenn eine der Reihen (3), also auch die Reihe (2) divergiert. Dagegen ist er nach dem Satze 1 der vorigen Nummer divergent, wenn die Reihe (2) konvergiert, und hiermit ist unser Satz vollkommen bewiesen.

Zu dem Kettenbruche (1) sei noch bemerkt, daß, wenn man ihn im Falle der Konvergenz mit dem n^{ten} Gliede abbricht, d. h. durch $\left[h_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^n$ ersetzt, der dadurch begangene Fehler kleiner als $1 : N_n N_{n+1}$ ist. Da nämlich der Wert K des Kettenbruches zwischen K_n und K_{n+1} liegt, so hat man nach Formel (VI) in X, 5

$$|K - K_n| < |K_{n+1} - K_n| = \frac{1}{N_n N_{n+1}}. \tag{6}$$

Weil hier $\lim (1 : N_n N_{n+1}) = 0$ bei $\lim n = +\infty$ ist, so dient diese Relation (6), falls bei numerisch gegebenem Kettenbruch (1) sein

Grenzwert zu berechnen ist, dazu, um die Genauigkeit der Rechnung Schritt für Schritt zu prüfen.

Lassen wir den Kettenbruch (1) die Hauptform von $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ sein, so sind die beiden Reihen (3) offenbar mit den in derselben Ordnung genommenen beiden Reihen (11) der vorigen Nummer identisch und es folgt daher aus dem Satze 1:

Satz 2. Der Kettenbruch $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiert oder schwankt zwischen zwei endlichen Grenzen, je nachdem von den beiden Reihen

$$\sum_1^\infty{}_r \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2r-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2r}} b_{2r} \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty{}_r \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2r}}{a_1 a_3 \cdots a_{2r-1}} \cdot \frac{b_{2r+1}}{a_{2r+1}} \tag{7}$$

mindestens eine oder keine divergiert.[1])

Der Quotient aus dem $(r+1)^{\text{ten}}$ und r^{ten} Gliede der Reihen (7) hat die Gestalt

$$q'_r = \frac{a_{2r+1}}{a_{2r+2}} \cdot \frac{b_{2r+2}}{b_{2r}}, \quad \text{bezw.} \quad q''_r = \frac{a_{2r+2}}{a_{2r+3}} \cdot \frac{b_{2r+3}}{b_{2r+1}}. \tag{8}$$

Auf Grund des vorstehenden Satzes kann man daher mit Hilfe des Kriteriums in VI, 10 beispielsweise zeigen, daß der Kettenbruch

$$\frac{a^\lambda}{b} + \frac{(a+b)^\lambda}{b} + \frac{(a+2b)^\lambda}{b} + \frac{(a+3b)^\lambda}{b} + \cdots,$$

worin a und b positive Zahlen bedeuten und λ reell ist, konvergiert oder oszilliert, je nachdem $\lambda \leqq 2$ oder $\lambda > 2$ ist.

In der Anwendung erweist sich der vorstehende Satz 2. (bezw. 1.) manchmal als unbequem, weshalb man sich auf andere Weise von der Konvergenz eines Kettenbruches $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zu überzeugen sucht. Zu diesem Zwecke dienen die folgenden Kriterien, welche hinreichende, jedoch im allgemeinen nicht notwendige Bedingungen für die Konvergenz eines aus positiven Elementen bestehenden Kettenbruches angeben:

1) „Der Kettenbruch (1) konvergiert, wenn die Reihe

$$h_0 h_1 + h_1 h_2 + \cdots + h_n h_{n+1} + \cdots \tag{9}$$

divergiert." — Ist nämlich die Reihe (2) konvergent, so offenbar auch die Reihe (9); somit hat die Divergenz der Reihe (9) auch jene der Reihe (2) zur Folge, wonach der Kettenbruch (1) gemäß des Satzes 1. konvergiert. Daß die hier aufgestellte Bedingung zur Kon-

1) Der Satz in dieser allgemeinen Form schon bei Stern a. a. O.

vergenz nicht auch notwendig ist, zeigt der Kettenbruch $\left[\frac{1}{1:\nu}\right]_1^\infty$,[1] welcher nach dem Satze 1 konvergiert, obwohl für ihn die Reihe (9) konvergent ist.

2) „Wenn die Reihe

$$\frac{b_0 b_1}{a_1} + \frac{b_1 b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} + \cdots \tag{10}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$." — Dies folgt unmittelbar aus 1), da nach den Formeln (10) der vorigen Nummer

$$h_n h_{n+1} = \frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

ist.

Beispiel. Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{a_n}$ divergiert.

3) „Wenn in dem Kettenbruche $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ von einem bestimmten Werte von n $(n = m)$ an $b_n \geqq a_n$ ist und die unendliche Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \tag{12}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch." — Da nämlich für $n \geqq m - 1$

$$\frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}} \geqq b_n$$

ist, so folgt aus der Divergenz von (12) jene von (10), also die Konvergenz des Kettenbruches.

Beispiel. Zufolge dieses Kriteriums konvergiert der Kettenbruch

$$\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_n} + \cdots \quad (a_n > 0), \tag{α}$$

falls die Reihe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{β}$$

divergiert. Wenn aber diese Reihe konvergiert, so kann der Kettenbruch sowohl konvergieren als auch divergieren. Man hat nach (8) wegen $b_n = a_n$

$$q_r' = \frac{a_{2r+1}}{a_{2r}} \quad \text{und} \quad q_r'' = \frac{a_{2r+2}}{a_{2r+1}} \tag{γ}$$

und aus diesen Formeln erkennt man, daß, wenn der Quotient $a_{n+1} : a_n$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzt, welcher kleiner als 1

1) Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. 29 (1899), S. 262.

ist, nicht nur die Reihe (β), sondern auch die beiden Reihen (7) konvergieren, der Kettenbruch (α) also divergent ist. Läßt sich $a_{n+1} : a_n$ auf die in VI, 10 angegebene Form

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega(n)}{n^\lambda} \quad (\lambda > 1) \tag{δ}$$

bringen, so hat man

$$q'_r = 1 + \frac{\mu}{2r} + \frac{\omega'(2r)}{(2r)^\lambda} = 1 + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\omega'(2r)}{2^\lambda} \cdot \frac{1}{r^\lambda}, \tag{ε}$$

$$q''_r = 1 + \frac{\mu}{2r+1} + \frac{\omega(2r+1)}{(2r+1)^\lambda} = 1 + \frac{\mu}{2r} \cdot \frac{1}{1+1:2r} + \frac{\omega(2r+1)}{(2r)^\lambda} \cdot \left(1 + \frac{1}{2r}\right)^{-\lambda} =$$

$$= 1 + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\mu}{2r}\left(-\frac{1}{2r} + \frac{1}{4r^2} - \cdots\right) + \frac{\omega(2r+1)}{(2r)^\lambda}\left(1 - \frac{\lambda}{2r} + \cdots\right),$$

mithin

$$q''_r = 1 + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\omega'(r)}{r^{\lambda'}}, \tag{ζ}$$

worin $\lambda' = \lambda$, falls $\lambda \leq 2$, dagegen $\lambda' = 2$ ist, falls $\lambda > 2$ ist, während $\omega'(r)$ mit $\omega(2r+1)$ die Eigenschaft teilt, bei $\lim r = +\infty$ endlich zu bleiben. Aus (ε) und (ζ) geht hervor, daß die beiden Reihen (7) divergieren, wenn $\mu \geqq -2$, dagegen konvergieren, wenn $\mu < -2$ ist. Im ersten Falle konvergiert, im zweiten divergiert der Kettenbruch (α), während das Kriterium 3) nur für den Fall $\mu \geqq -1$ Konvergenz anzeigt.

4) „Der Kettenbruch (1) konvergiert, wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty \sqrt{h_n h_{n+1}} \tag{13}$$

divergiert.“[1]) — Denn da $h_n > 0$ $(n > 0)$ ist, so folgt aus

$$(h_n + h_{n+1})^2 = (h_n - h_{n+1})^2 + 4h_n h_{n+1}$$

die Beziehung

$$\frac{h_n + h_{n+1}}{2} \geqq \sqrt{h_n \cdot h_{n+1}}.$$

Wenn nun Σh_n konvergiert, so konvergiert auch $\frac{1}{2}\Sigma(h_n + h_{n+1})$ und daher ebenso die Reihe (13). Demnach zieht die Divergenz der Reihe (13) jene der Reihe (2), also die Konvergenz des Kettenbruches (1) nach sich.

Wie Pringsheim gezeigt hat, ist die vorstehende Bedingung zur Konvergenz des Kettenbruches (1) nicht notwendig.[2]) Setzt man z. B.

$$h_n = 1 : \left\{n^{2+(-1)^n}\right\},$$

---

1) Dieses Kriterium in der Form 5) wurde von Saalschütz gefunden, Journal f. Math., Bd. 120 (1899), S. 138, Fußnote. Dasselbe ist etwas weiter als das Kriterium 1) bezw. 2).

2) Pringsheim, a. zuletzt a. O. S. 265.

so daß

$$h_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \quad \text{und} \quad h_{2n} = \frac{1}{(2n)^3}$$

wird, so divergiert die Reihe Σh_{2n+1}, d. i. $\sum \frac{1}{2n+1}$ und daher auch die Reihe (2); der Kettenbruch (1) ist also in diesem Falle konvergent. Dagegen hat man

$$\sum_1^\infty{}^n \sqrt{h_n h_{n+1}} = \sum_1^\infty{}^n \sqrt{h_{2n}}\left(\sqrt{h_{2n-1}} + \sqrt{h_{2n+1}}\right) =$$

$$= \sum_1^\infty{}^n \frac{1}{(2n)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

und da für alle Werte $n \geqq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 2$$

ist und $\Sigma 1 : (2n)^{\frac{3}{2}}$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe (13) trotz der Konvergenz des Kettenbruches (1).

Überträgt man das vorstehende Kriterium auf Grund der Formeln (11) auf den allgemeinen Kettenbruch mit positiven Elementen, so gewinnt dasselbe die Gestalt:

5) „Der Kettenbruch $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_1^\infty{}^n \sqrt{\frac{b_n b_{n+1}}{a_{n+1}}}$$

divergiert."

Beispiel. Zur Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ist hinreichend, daß die Reihe $\sum_1^\infty{}^n \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ divergiert.

Da jede unendliche Reihe dadurch, daß man in ihr eine endliche Anzahl von Gliedern wegläßt, in eine mit ihr gleichartige Reihe übergeht, so folgt aus dem Satze 1. unmittelbar, daß auch jeder unendliche Kettenbruch $\left[h_0 + \frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty$, dessen Teilnenner positive Zahlen sind, mit jedem aus ihm durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Gliedern entstehenden Kettenbruche gleichartig ist. Dasselbe gilt aber auch von dem allgemeinen, aus positiven Elementen bestehenden Kettenbruche $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$. Denn die Quotienten q_r' und q_r'' in den

Formeln (8) haben die gemeinsame Gestalt

$$q_s = \frac{a_{s+1} b_{s+2}}{a_{s+2} b_s}. \tag{14}$$

Schaltet man nun k Glieder, deren letztes den Index m besitzen möge, aus dem ursprünglichen Kettenbruche aus und bezeichnet mit p_s die dem neuen Kettenbruche entsprechenden Quotienten (14), so ist offenbar für alle Werte von s, die größer als m sind, $p_{s-k} = q_s$. Daraus folgt aber im Hinblicke auf den Satz 2 die Gleichartigkeit der beiden Kettenbrüche. (Vgl. auch Nr. 6.)

Wenn der Kettenbruch $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ konvergiert, so liegt, wie schon bemerkt wurde, sein Grenzwert K zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen. Um in diesem Falle zu entscheiden, welchem von ihnen er näher liegt, kann man die folgende Formel gebrauchen, die sich aus der Relation (XI) in X, 5 durch den Grenzübergang $\lim r = +\infty$ ergibt. Da nämlich nach dem Vorstehenden auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{k+1}^\infty$ [1]) konvergent ist, also einen endlichen Wert R_{k+1} besitzt, so findet man aus jener Relation

$$\frac{K - K_k}{K_{k-1} - K} = \frac{N_{k-1}}{N_k} \cdot R_{k+1}. \tag{15}$$

4. Die regelmäßigen unendlichen Kettenbrüche.

Ein unendlicher Kettenbruch

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots, \tag{16}$$

dessen jeder Näherungsbruch regelmäßig ist, heißt auch selbst ein regelmäßiger oder einfacher Kettenbruch. Seine Näherungsbrüche besitzen die in X, 10 vorgeführten Eigenschaften; die Näherungsnenner N_n sind also positiv, nehmen mit wachsendem n beständig zu und werden mit n zugleich unendlich. Die letztere Eigenschaft geht aus den Formeln (5) der vorigen Nummer hervor, indem man dort $h_n = b_n$ setzt und bedenkt, daß nunmehr $b_n \geqq 1$ ist. Der vorliegende Kettenbruch (16) ist zufolge des Satzes 1. der vorigen Nummer stets konvergent und sein Grenzwert K liegt zwischen b_0 und $b_0 + \frac{1}{b_1}$, er ist also positiv und kleiner als 1, falls $b_0 = 0$ ist.

---

1) Seidel nennt diesen Kettenbruch die Ergänzung des k^{ten} Näherungsbruches von $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$. Abhandl. d. bayer. Ak. Bd. 7 (1855), S. 570.

Wendet man daher die obige Formel (15) auf den Kettenbruch (16) an, so hat man jetzt

$$0 < R_{k+1} < 1 \quad \text{und} \quad N_k > N_{k-1} > 0,$$

mithin

$$|K - K_k| < |K_{k-1} - K|, \tag{17}$$

d. h. der Wert des Kettenbruches (16) liegt einem Näherungsbruche K_k um so näher, je größer der Zeiger k des letzteren ist. Zugleich ist nach Formel (6) der vorigen Nummer wegen $N_{n+1} > N_n$

$$|K - K_n| < \frac{1}{N_n^2}; \tag{18}$$

bricht man also den Kettenbruch mit dem n^{ten} Gliede ab, so ist der dadurch entstehende Fehler kleiner als der reziproke Wert des Quadrates des letzten Näherungsnenners.

Der Grenzwert K des Kettenbruches (16) ist stets irrational. Wäre nämlich K eine rationale Zahl, die man stets in Form eines Bruches $\frac{a}{b}$ $(b \geqq 1)$ anschreiben könnte, so müßte $\frac{a}{b}$ zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Näherungsbrüchen liegen; nach dem Satze 5) in X, 10 müßte daher b größer sein als jeder der Näherungsnenner N_n, was jedoch nicht möglich ist, da N_n mit n zugleich ins Unendliche wächst.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß jeder Näherungsbruch K_n den Wert K des Kettenbruches (16) genauer darstellt, als jeder andere gemeine Bruch $\frac{a}{b}$, dessen reduzierter Nenner b nicht größer als der Nenner N_n des ersteren ist. Denn liegt $\frac{a}{b}$ näher an K als der Näherungsbruch K_n, so ist nach (17)

$$\left|K - \frac{a}{b}\right| < |K - K_n| < |K_{n-1} - K|$$

und diese Doppelrelation ist nur möglich, wenn neben K auch $\frac{a}{b}$ zwischen K_n und K_{n-1} liegt; somit muß gemäß des soeben erwähnten Satzes $b > N_n$ sein.

Auch besteht der dem Satze 7) in X, 10 analoge Satz:

Zwei regelmäßige, unendliche Kettenbrüche sind nur dann einander gleich, wenn sie identisch sind.

Der Beweis kann hier ähnlich wie dort geführt werden. Es sei also

$$K = \left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty, \quad K' = \left[b_0' + \frac{1}{b_\nu'}\right]_1^\infty$$

und $K = K'$. Setzen wir nun

$$R_n = \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_{n}^{\infty} \quad \text{und} \quad K_n = \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_{n}^{\infty},$$

so ist für jeden Wert $n \geqq 1$

$$0 < R_n < 1 \quad \text{und} \quad 0 < K_n < 1.$$

Wegen $K = K'$ hat man $b_0 + R_1 = b'_0 + K_1$, also

$$b_0 - b'_0 = |R_1 - K_1| < 1$$

und daraus folgt, da b_0 und b'_0 ganze Zahlen sind, $b_0 = b'_0$ und $R_1 = K_1$. Ist aber für irgend einen Wert n $R_n = K_n$, also $b_n + R_{n+1} = b'_n + K_{n+1}$, so hat man in der gleichen Weise

$$b_n - b'_n = |R_{n+1} - K_{n+1}| < 1$$

und demzufolge $b_n = b'_n$ und $R_{n+1} = K_{n+1}$. Somit ist allgemein $b_n = b'_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

Dem Satze 8) in X, 10 entspricht hier der folgende:

Jede irrationale Zahl läßt sich stets und zwar nur auf eine einzige Weise in einen regelmäßigen unendlichen Kettenbruch verwandeln.

Daß diese Verwandlung, wenn überhaupt, so nur in einer einzigen Weise möglich ist, verbürgt der soeben bewiesene Satz. Es handelt sich also noch darum, die Möglichkeit dieser Kettenbruchentwicklung darzutun. Zu diesem Zwecke sei x eine beliebige irrationale und b_0 die größte in ihr enthaltene ganze Zahl. Setzt man dann $x = b_0 + x_1$, so ist $0 < x_1 < 1$, also $1 : x_1 > 1$, wobei x_1 notwendig wieder irrational ist. Jede irrationale Zahl y, welche größer als 1 ist, läßt sich nun auf die Form $y = b + y'$ bringen, worin b die größte in y enthaltene ganze Zahl, also eine natürliche Zahl $\geqq 1$ und y' eine irrationale, zwischen Null und 1 gelegene Zahl ist. Dementsprechend können wir nacheinander

$$\left.\begin{aligned} x &= b_0 + x_1 \quad (0 < x_1 < 1) \\ \frac{1}{x_1} &= b_1 + x_2 \quad (0 < x_2 < 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{x_n} &= b_n + x_{n+1} \quad (0 < x_{n+1} < 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (\eta)$$

setzen. Die Anzahl dieser Relationen ist unbegrenzt, da jede der Zahlen x_n notwendig irrational ist. Durch die auf diese Weise ermittelten Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ wird aber ein regelmäßiger unendlicher Kettenbruch $K = \left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ bestimmt, und es ist, wie man durch

schrittweise Elimination der Größen $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ aus den vorstehenden Gleichungen findet,

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n + x_{n+1}} = \frac{Z_n + Z_{n-1} x_{n+1}}{N_n + N_{n-1} x_{n+1}}$$

und somit

$$x - K_n = \frac{(-1)^n x_{n+1}}{N_n (N_n + N_{n-1} x_{n+1})}.$$

Da nun $0 < x_{n+1} < 1$ ist und die Näherungsnenner N_n positiv sind, so folgt daraus

$$|x - K_n| < \frac{1}{N_n^2}.$$

Wir wissen aber bereits, daß $\lim N_n = +\infty$ bei $\lim n = +\infty$ ist, so daß sich aus der letzten Ungleichung beim nämlichen Grenzübergange

$$x = \lim K_n = K = \left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

ergibt.

Wie man vorzugehen hat, um auf Grund einer für x gegebenen unvollständigen Dezimalzahl einige, den Anfang bildende Elemente $b_0, b_1, b_2, \ldots$ im regelmäßigen Kettenbruche für x zu ermitteln[1]), wird aus dem nachstehenden Beispiele ersichtlich werden. Es sei der Anfang des Kettenbruches für die Ludolphsche Zahl auf Grund der Angabe

$$\pi = 3{,}1415926 + \alpha : 10^7 \quad (0 < \alpha < 1)$$

zu berechnen. Man entwickelt den Quotienten $(1\,415\,926 + \alpha) : 10^7$ in einen Kettenbruch, was folgende Rechnung erheischt:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1\,415\,926 + \alpha \\
10\,000\,000 : r_1 &= 7 + (88\,518 - 7\alpha) : r_1 && b_1 = 7 \\
r_2 &= 88\,518 - 7\alpha \\
r_1 : r_2 &= 15 + (88\,156 + 106\alpha) : r_2 && b_2 = 15 \\
r_3 &= 88\,156 + 106\alpha \\
r_2 : r_3 &= 1 + (362 - 113\alpha) : r_3 && b_3 = 1 \\
r_4 &= 362 - 113\alpha.
\end{aligned}$$

Der Quotient $88\,156 : 362$ ist dreiziffrig und beginnt mit der Ziffer 2. Läßt man den Quotienten $r_3 : r_4$ mit 200 beginnen, so ist der Rest $15\,756 + 22\,706\alpha$. Da er für $\alpha = 1$ in $38\,462$ übergeht, so kann b_4 möglicherweise mit 3 beginnen. Unser Rechnungsverfahren liefert also von dem gesuchten Kettenbruche nur das Stück

1) Vgl. Lambert, Beiträge II, S. 72.

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} \dot{+} \frac{1}{15} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \cdots \qquad (\vartheta)$$

nebst der Bemerkung, daß b_4 dreiziffrig ist und mit 2 oder 3 beginnt. Mittels genauerer Näherungswerte findet man $b_4 = 292$.

Sind zwei rationale Grenzen x' und x'' (z. B. zwei unvollständige Dezimalbrüche) gegeben, zwischen denen die irrationale Zahl x enthalten ist, und stimmen die den Zahlen x' und x'' entsprechenden, regelmäßigen endlichen Kettenbrüche in ihren ersten n Gliedern miteinander überein, so bilden diese Glieder auch den Anfang des der Zahl x entsprechenden, regelmäßigen unendlichen Kettenbruches. Auf Grund dieser Bemerkung, die im Hinblicke auf die Relationen (η) leicht ihre Bestätigung findet, läßt sich die vorstehende Rechnung vereinfachen. Denn setzt man hier

$$x' = 3{,}1415926 \quad \text{und} \quad x'' = 3{,}1415927,$$

so ist $x' < \pi < x''$ und man findet mit Hilfe des durch die Relationen (β) in X, 10 dargestellten Kettendivisionsverfahrens

$$x' = 3 + \frac{1}{7} \dot{+} \frac{1}{15} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{243} \dot{+} \cdots, \quad x'' = 3 + \frac{1}{7} \dot{+} \frac{1}{15} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{353} \dot{+} \cdots,$$

woraus sich sofort das obige Resultat (ϑ) ergibt. Um sich dabei jede überflüssige Rechnung zu ersparen, führt man die Kettenbruchentwicklungen von x' und x'' gleichzeitig schrittweise aus und hört mit der Rechnung auf, sobald als sich in den Gliedern der beiden Kettenbrüche eine Differenz herausstellt.

5. Unendliche Kettenbrüche mit positiven Teilnennern und negativen Teilzählern.

Eine allgemeine Regel zur Entscheidung der Frage, ob ein solcher Kettenbruch konvergiere oder divergiere, ist bis jetzt nicht aufgestellt worden; jedoch gibt es unter ihnen eine umfassende Klasse von konvergenten Kettenbrüchen. Es sind dies diejenigen unendlichen Kettenbrüche von der Form

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-} \cdots,$$

deren Teilzähler und Teilnenner den in X, 11 angegebenen Bedingungen genügen. Es besteht nämlich der Satz:

Satz.[1]) „Wenn in dem Kettenbruche

$$K \equiv \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \frac{a_3}{b_3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-} \cdots, \qquad (1)$$

worin die a_n und b_n positive Zahlen bedeuten,

$$b_n \geqq a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (2)$$

1) Vgl. Stern, Theorie der Kettenbrüche § 55, oder Lehrbuch d. algebr. Analysis S. 299; ebenso Seidel, Abhandl. d. bayer. Ak. Bd. 7 (1855), S. 582.

ist, so konvergiert er. Ist für alle Werte von n

$$b_n = a_n + 1, \tag{3}$$

so hat N_n bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen positiven Grenzwert $N > 1$ oder aber den Grenzwert $+\infty$, je nachdem die unendliche Reihe

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n + \cdots \tag{4}$$

konvergiert oder divergiert. Im ersteren Falle ist $K = (N-1) : N$, im letzteren $K = 1$. Falls nicht durchweg $b_n = a_n + 1$ ist, liegt K zwischen Null und 1, d. h. es ist $0 < K < 1$."

Beweis. Setzt man

$$K_n = \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{und} \quad K_n' = \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \dot{-} \frac{a_n}{b_n - 1},$$

so sind K_n und K_n' nach den Sätzen 1. und 2. in X, 11 positiv; K_n nimmt mit n zugleich beständig zu, während K_n' bei wachsendem n niemals zunimmt. Zugleich ist gemäß der Formel (54) dortselbst wegen $N_{n+1} > N_n$

$$K_n' > K_n.$$

Demnach ist der Kettenbruch (1) konvergent und sein Grenzwert K liegt jedenfalls im Intervalle (0, 1), wobei der Wert Null selbst ausgeschlossen ist; denn man hat für $n > 1$

$$0 < \frac{a_1}{b_1} < K_n < K \leqq K_1' = \frac{a_1}{b_1 - 1} \leqq 1.$$

Wenn nun $b_1 > a_1 + 1$ ist, so geht daraus schon unmittelbar die Beziehung $0 < K < 1$ hervor. Dasselbe ist auch der Fall, wenn nur für irgend einen Wert m $b_m > a_m + 1$ ist. Denn ist $m > 1$, so hat man nach dem Satze 2. in X, 11

$$K_m' < K_{m-1}' \quad \text{und} \quad K \leqq K_m' < K_{m-1}' \leqq K_1' \leqq 1,$$

also $K < 1$.

Wir haben nun noch den Fall, daß durchweg $b_n = a_n + 1$ ist, eingehender zu betrachten. Aus den Formeln (II) in X, 3 ergibt sich mit Rücksicht auf den vorliegenden Kettenbruch (1) für $n \geqq 2$

$$\begin{aligned} N_n - Z_n &= (b_n N_{n-1} - a_n N_{n-2}) - (b_n Z_{n-1} - a_n Z_{n-2}) = \\ &= b_n (N_{n-1} - Z_{n-1}) - a_n (N_{n-2} - Z_{n-2}), \end{aligned} \tag{5}$$

und weil hier

$$N_0 - Z_0 = 1 \quad \text{und} \quad N_1 - Z_1 = b_1 - a_1 = 1$$

ist, erhält man hieraus im Hinblicke auf (3) nacheinander

$$N_2 - Z_2 = 1,\ N_3 - Z_3 = 1,\ N_4 - Z_4 = 1, \cdots,$$

allgemein

$$N_n - Z_n = 1.^1)$$

Demnach ist im vorliegenden Falle

$$K_n = \frac{Z_n}{N_n} = 1 - \frac{1}{N_n},$$

also $K = 1 - \frac{1}{N}$ oder $K = 1$, je nachdem N_n bei $\lim n = +\infty$ den endlichen Grenzwert N oder den Grenzwert $+\infty$ hat. Um zu erfahren, wann das erstere oder das letztere eintritt, müssen wir uns die Nenner N_n noch näher ansehen. Zufolge der soeben erwähnten Formeln (II) in X, 3 ist für $n \geqq 2$

$$N_n = b_n N_{n-1} - a_n N_{n-2} = (b_n - a_n) N_{n-1} + a_n (N_{n-1} - N_{n-2});$$

wir haben daher, wenn wir uns zunächst nicht an die Bedingungen (3), sondern an die allgemeineren (2) halten, neben $b_n \geqq a_n + 1$ entsprechend

$$N_n - N_{n-1} \geqq a_n (N_{n-1} - N_{n-2}) \quad (n \geqq 2). \tag{6}$$

Außerdem ist $N_0 = 1$ und $N_1 = b_1$, woraus sich der Beziehung $b_1 \geqq a_1 + 1$ entsprechend

$$N_1 - N_0 = b_1 - 1 \geqq a_1$$

ergibt. Mithin findet man aus (6) für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$N_n - N_{n-1} \geqq a_1 a_2 \cdots a_n \tag{7}$$

und

$$N_n \geqq 1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n, \tag{8}$$

und zwar kommt in diesen beiden Relationen das Gleichheitszeichen dann und nur dann zur Geltung, wenn $b_r = a_r + 1$ für alle Werte $r = 1, 2, \ldots n$ ist. Unter der Voraussetzung (3) hat man demnach

$$N_n = 1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n;$$

1) Wegen einer später folgenden Anwendung sei noch bemerkt, daß, wenn nicht durchweg $b_n = a_n + 1$ ist, die Relation

$$N_n - Z_n \geqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

besteht. — Nach (5) hat man nämlich für $n > 1$

$$N_n - Z_n \geqq N_{n-1} - Z_{n-1} + a_n \{(N_{n-1} - Z_{n-1}) - (N_{n-2} - Z_{n-2})\};$$

daraus ergibt sich durch den Schluß von n auf $n+1$, da $N_1 - Z_1 = b_1 - a_1 \geqq 1 = N_0 - Z_0$ ist, allgemein

$$N_n - Z_n \geqq N_{n-1} - Z_{n-1} \quad \text{und somit} \quad N_n - Z_n \geqq 1.$$

demzufolge ist lim N_n bei lim $n = +\infty$ eine endliche Zahl N oder $+\infty$, je nachdem die Reihe (4) konvergiert oder divergiert, und hiermit ist unser Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

Zur Abschätzung des Fehlers, welcher sich ergibt, wenn man den Kettenbruch (1) mit dem n^{ten} Gliede abbricht, kann man die Formel (54) in X, 11 benützen. Da nämlich $K_n' \geqq K > K_n$ ist, so liefert diese Formel im Hinblicke auf die obige Relation (7) die Beziehung

$$0 < K - K_n \leqq \frac{1}{N_n}. \tag{9}$$

Dieses Ergebnis hat allerdings nur dann einen praktischen Wert, wenn lim $N_n = +\infty$ ist, was zufolge (8) sicher dann zutrifft, wenn die Reihe (4) divergiert.

Zu dem vorstehenden Satze, beziehungsweise zu den Kettenbrüchen, welche die Bedingungen desselben erfüllen, sei noch folgendes bemerkt:

1) „Der Kettenbruch (1) ist auch dann noch konvergent, wenn die Bedingungen (2) erst von $n = 2$ an erfüllt sind, während $b_1 > 1$ ist." — Denn nach X, 11 zeigen die gewöhnlichen und die mittelbaren Näherungsbrüche auch jetzt noch dasselbe Verhalten. Ist dagegen $b_1 \leqq 1$, so kann nunmehr der Kettenbruch auch divergent sein, und zwar tritt dieser Fall dann ein, wenn b_1 gleich dem Grenzwerte des Kettenbruches $\left[\frac{a_2}{b_2} \dotplus \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_3^\infty$ ist.

2) „Der den Bedingungen (2) entsprechende Kettenbruch (1) ist stets ein eigentlicher Kettenbruch." — Denn die Näherungsbrüche K_n nehmen mit wachsendem n beständig zu und sind daher lauter eigentliche Kettenbrüche.

3) „Jeder aus dem Kettenbruche (1) durch Weglassung einer begrenzten oder auch unbegrenzten Anzahl von Gliedern entstehende unendliche Kettenbruch ist ebenfalls konvergent." — Dies ist unmittelbar aus den Bedingungen (2) ersichtlich.

Zu der durch die Relationen (2) definierten Klasse von Kettenbrüchen gehören insbesondere die reduziert-regelmäßigen unendlichen Kettenbrüche von der Form

$$\frac{1}{b_1} \dotplus \frac{1}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{b_n} \dotplus \cdots \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad \left[b_0 - \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

worin die sämtlichen Teilnenner natürliche Zahlen größer als 1 sind. Diese sind also stets eigentliche Kettenbrüche und stets konvergent. Für dieselben ist die Reihe (4) wegen $a_n = 1$ stets divergent, die Näherungsnenner N_n wachsen daher mit n zugleich ins Unendliche und der Unterschied zwischen dem wirklichen Werte des

Kettenbruches und seinem n^{ten} Näherungsbruche ist zufolge (9) absolut genommen stets kleiner als $1 : N_n$.

Auch läßt sich hier in ähnlicher Weise, wie es bei den einfachen Kettenbrüchen in Nr. 4 geschehen ist, zeigen, daß zwei reduziert-regelmäßige Kettenbrüche nur dann einander gleich sind, wenn sie identisch sind, und daß sich jede irrationale Zahl in einer einzigen Weise in einen solchen Kettenbruch verwandeln läßt. Den ersteren Nachweis wollen wir als Übungsbeispiel hinstellen. Der Nachweis der Darstellbarkeit einer beliebigen irrationalen Zahl x durch einen reduziert-regelmäßigen Kettenbruch kann in folgender Weise geliefert werden.

Wir bestimmen die ganze Zahl b_0 und die natürlichen Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ durch die Relationen

$$\begin{aligned} x &= b_0 - x_1 \quad (0 < x_1 < 1) \\ \frac{1}{x_1} &= b_1 - x_2 \quad (0 < x_2 < 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{x_n} &= b_n - x_{n+1} \quad (0 < x_{n+1} < 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die genannten Zahlen sind dadurch eindeutig bestimmt und man hat $b_n > 1 : x_n > 1$, also, da b_n eine natürliche Zahl ist, $b_n \geqq 2$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wegen der Irrationalität von x ist die Anzahl der vorstehenden Gleichungen unbegrenzt, so daß durch die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ ein unendlicher reduziert-regelmäßiger Kettenbruch $K = \left[b_0 - \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ definiert wird. Zugleich ergibt sich aus den obigen Relationen

$$x = b_0 - \frac{1}{b_1} \dot{-} \frac{1}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{1}{b_n - x_{n+1}} = \frac{Z_n - Z_{n-1} x_{n+1}}{N_n - N_{n-1} x_{n+1}},$$

woraus man mit Hilfe der Formel (V) in X, 5 die Beziehung

$$K_n - x = \frac{x_{n+1}}{N_n (N_n - N_{n-1} x_{n+1})}$$

findet. Da nun $0 < x_{n+1} < 1$ und zufolge (7) $N_n - N_{n-1} \geqq 1$ ist, so hat man

$$N_n - N_{n-1} x_{n+1} > N_n - N_{n-1} \geqq 1, \quad \text{also} \quad 0 < K_n - x < \frac{1}{N_n}.$$

Beachtet man noch, daß im vorliegenden Falle die Reihe (4) divergiert und daher N_n nach (8) bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$ hat, so ergibt sich daraus

$$\lim_{n = +\infty} (K_n - x) = 0, \quad \text{d. i.} \quad x = K.$$

Hinsichtlich derjenigen unendlichen Kettenbrüche von der Form (1), die unzählige Glieder besitzen, worin $b_n < a_n + 1$ ist, hat Seidel bemerkt[1]), daß es unter den Kettenbrüchen von der reduzierten Form

$$\frac{1}{h_1} \dot{-} \frac{1}{h_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{1}{h_n} \dot{-} \cdots,$$

wo die $h_1, h_2, \ldots$ positive Zahlen sind, die sich steigend der Grenze 2 nähern, sowohl konvergente als auch divergente gibt, ja er hat die Existenz eines konvergenten Kettenbruches von dieser Gestalt nachgewiesen, dessen Teilnenner h_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $\sqrt{2}$ haben. Stern hat gezeigt[2]), daß der Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots$$

konvergiert und einen positiven Grenzwert hat, wenn für jeden Wert von n die Relation

$$\frac{a_1}{b_0 b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_{n-1} b_n} \leqq 1$$

besteht. (Vgl. hierüber auch Nr. 8.)

Beispiele. 1) Der periodische[3]) Kettenbruch

$$\frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a}{a+1} \dot{-} \cdots \quad (a > 0)$$

konvergiert und sein Grenzwert ist a oder 1, je nachdem a kleiner als 1 ist oder nicht.

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \cdots = 1.$$

2) Wendet man auf den Kettenbruch

$$\frac{a_1}{a_1} \dot{-} \frac{a_2}{a_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{a_n} \dot{-} \cdots \quad (a_n > 0) \qquad (\alpha)$$

die Formel (8) in Nr. 2 an, indem man daselbst

$$c_1 = 1 : a_1 \quad \text{und} \quad c_n = a_{n-1} : a_n \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

setzt, so geht er in den ihm äquivalenten

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{a_1} \dot{-} \frac{a_1}{a_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_{n-1}}{a_n} \dot{-} \cdots \qquad (\beta)$$

über. Nach dem eingangs dieser Nummer vorgeführten Satze ist nun der Kettenbruch (β) und somit auch (α) sicher konvergent, wenn

$$a_1 > 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} \geqq a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

1) Seidel, a. a. O. S. 591—595.
2) Stern, Göttinger Nachrichten 1863, S. 143.
3) Vgl. Nr. 10.

ist. Dasselbe gilt im allgemeinen auch dann, wenn nur die letzteren Bedingungen erfüllt sind, während $a_1 \leqq 2$ ist; hiervon ausgenommen ist nur der Fall, in welchem gerade

$$a_1 \dot{-} \frac{a_1}{a_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_{n-1}}{a_n} \dot{-} \cdots = 1$$

ist.

3) Einen besonderen Fall von (α) und (β) im vorigen Beispiele bilden die beiden äquivalenten Kettenbrüche

$$\frac{a}{a} \dot{-} \frac{a+1}{a+1} \dot{-} \frac{a+2}{a+2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a+n}{a+n} \dot{-} \cdots \qquad (\gamma)$$

und

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{a} \dot{-} \frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a+1}{a+2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a+n-1}{a+n} \dot{-} \cdots, \qquad (\delta)$$

worin $a > 0$ ist. Da der Kettenbruch

$$\frac{a}{a+1} \dot{-} \frac{a+1}{a+2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a+n-1}{a+n} \dot{-} \cdots$$

konvergiert und den Grenzwert $+1$ hat, so konvergiert (δ) und mithin auch (γ) zum Grenzwerte $\frac{a-1}{a-2}$, wenn nur nicht $a = 2$ ist. Für $a = 2$ divergieren die beiden Kettenbrüche (γ) und (δ) nach $+\infty$. Es ist also

$$\lim_{n=+\infty} \left(\frac{2}{2} \dot{-} \frac{3}{3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n}{n} \right) = +\infty; \qquad (\varepsilon)$$

Dagegen hat man

$$\frac{3}{3} \dot{-} \frac{4}{4} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n}{n} \dot{-} \cdots = 2 \qquad (\zeta)$$

und

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{2}{2} \dot{-} \frac{3}{3} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n}{n} \dot{-} \cdots = 0. \qquad (\eta)$$

6. Bedingte und unbedingte Konvergenz von Kettenbrüchen.

Während man in einer konvergenten unendlichen Reihe oder einem konvergenten unendlichen Produkte stets mindestens eine endliche Anzahl von Gliedern, beziehungsweise Faktoren miteinander vertauschen darf, ohne daß der Wert der Reihe oder des Produktes dadurch eine Änderung erleidet, ist eine solche gegenseitige Vertauschbarkeit der Teilbrüche in einem unendlichen Kettenbruche zum vorhinein ausgeschlossen, weil hier je zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder nicht wie bei den Reihen und Produkten durch eine kommutative Operation miteinander verknüpft sind. Ein weiterer Umstand, durch den sich die unendlichen Kettenbrüche von den unendlichen Reihen und Produkten wesentlich unterscheiden, ist der folgende. Läßt man von einer unendlichen Reihe oder einem unendlichen Produkte, in welchem kein Faktor Null ist, eine endliche

Anzahl von Gliedern, bezw. Faktoren, z. B. die ersten m derselben weg, so erhält man einen mit dem ursprünglichen gleichartigen, d. h. mit ihm zugleich konvergenten oder divergenten Ausdruck. Von den unendlichen Kettenbrüchen hingegen gilt das nicht unbedingt.[1]) Wohl trifft dies zwar zu bei allen jenen Kettenbrüchen, welche die Bedingungen der in den vorausgehenden Nummern aufgestellten Sätze erfüllen, sowie bei manchen anderen, jedoch beispielsweise nicht mehr bei dem am Schlusse der vorigen Nummer vorgeführten Kettenbruche (η). Denn beginnt man denselben erst mit dem zweiten Gliede, so geht er, abgesehen vom Vorzeichen, in den divergenten Kettenbruch (ε) über.

Wir fassen nun lediglich das Verhalten eines konvergenten Kettenbruches für den Fall ins Auge, als man in ihm die ersten m Glieder, ohne eines davon zu übergehen, wegläßt. Dann lassen sich hinsichtlich der Konvergenz der Kettenbrüche zwei Arten derselben unterscheiden, welche Pringsheim als unbedingte, beziehungsweise bedingte Konvergenz bezeichnet.[2]) Danach heißt ein konvergenter Kettenbruch $K \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, dessen Elemente reell oder komplex sein können, unbedingt konvergent, wenn neben K auch jeder der Kettenbrüche

$$R_n \equiv \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty \ (n = 2, 3, \cdots) \quad \text{oder} \quad E_n \equiv \left[b_n + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty \ (n = 1, 2, \cdots)$$

konvergiert; dagegen heißt K bedingt konvergent, wenn von den Kettenbrüchen E_n mindestens einer divergiert. Die den Sätzen in Nr. 3 und 5 entsprechenden Kettenbrüche, zu denen insbesondere auch die regelmäßigen gehören, sind also sämtlich unbedingt konvergent, während der oben erwähnte Kettenbruch (η) nur bedingt konvergiert. Man kann noch hinzufügen, daß jeder eigentlich divergente Kettenbruch insofern nur bedingt divergiert, als neben

$$\lim_{n=+\infty} \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \infty \quad \text{stets} \quad \lim_{n=+\infty} \left[b_1 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = 0$$

ist.

Es möge noch besonders hervorgehoben sein, daß ein unbedingt konvergenter Kettenbruch dadurch, daß man in ihm ein beliebiges, jedoch von b_0 und $\frac{a_1}{b_1}$ verschiedenes Glied wegläßt, in einen divergenten Kettenbruch übergehen kann. So ist z. B. der Kettenbruch

1) Vgl. Stern, Lehrbuch d. algebr. Analysis, S. 307.

2) Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 28 (1898), S. 299. Dortselbst S. 306 ist auch der im Texte folgende Satz enthalten. — Man beachte, daß die bedingte und unbedingte Konvergenz hier eine ganz andere Bedeutung als bei den unendlichen Reihen und Produkten hat.

$$\frac{2}{2} \dot{-} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{3}{3} \dot{-} \frac{4}{4} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n}{n} \dot{-} \cdots$$

unbedingt konvergent und hat den Grenzwert 2, was man im Hinblicke auf den Kettenbruch (ζ) am Schlusse der vorigen Nummer leicht findet. Läßt man aber aus ihm das zweite Glied $\frac{1}{1}$ weg, so geht derselbe in den divergenten Kettenbruch (ε) über.

Zufolge dieses Umstandes erscheint die Unterscheidung zwischen bedingt und unbedingt konvergenten Kettenbrüchen in dem angegebenen Sinne zunächst noch als eine ganz willkürliche, und man könnte wohl die Frage aufwerfen, ob es nicht mehr Berechtigung hätte, einen konvergenten Kettenbruch nur dann als unbedingt konvergent zu bezeichnen, wenn derselbe nach Weglassung einer beliebigen Anzahl beliebiger Glieder wieder einen konvergenten Kettenbruch liefert. Daß dies jedoch nicht zutrifft, zeigt der folgende Satz, in welchem erst das eigentliche Wesen der beiden hier unterschiedenen Arten der Konvergenz zum Vorschein tritt.

Satz von Pringsheim. Ein konvergenter Kettenbruch

$$K \equiv b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \cdots$$

ist bedingt oder unbedingt konvergent, je nachdem K einem seiner Näherungsbrüche $K_0, K_1, K_2, \ldots$ gleich ist oder nicht. Konvergiert der Kettenbruch nur bedingt, so gibt es also mindestens einen Wert $m \geqq 0$ derart, daß $K = K_m$ ist, und der unendliche Kettenbruch K kann in diesem Falle durch den endlichen $\left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ ersetzt werden.

Beweis. Ersetzt man in den Formeln (IIIa) und (IIIb) in X, 4 die Zeiger m, p, k der Reihe nach durch $0, n, m+1$, so lauten dieselben

$$\left.\begin{aligned} Z_n &= a_{m+1} N_{m+1,n} Z_{m-1} + Z_{m+1,n} Z_m \\ N_n &= a_{m+1} N_{m+1,n} N_{m-1} + Z_{m+1,n} N_m \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqq m < n). \qquad (1)$$

Da der Kettenbruch K konvergent ist, so gibt es eine natürliche Zahl n' derart, daß für alle Werte von n, welche nicht kleiner als n' sind, $|N_n| > 0$ ist, und für diese Werte des n ist daher gemäß der vorstehenden Gleichungen

$$K_n = \frac{Z_n}{N_n} = \frac{a_{m+1} N_{m+1,n} Z_{m-1} + Z_{m+1,n} Z_m}{a_{m+1} N_{m+1,n} N_{m-1} + Z_{m+1,n} N_m} \quad (1 \leqq m < n). \qquad (2)$$

Betrachten wir nun $N_{m+1,n}$ bei konstantem m als Funktion von n, so sind bezüglich ihres Verhaltens bei unbegrenzt wachsendem n zunächst zwei Fälle denkbar: Entweder gibt es eine natürliche Zahl

$n'' \geqq n'$ von der Beschaffenheit, daß $N_{m+1,n}$ von Null verschieden ausfällt, wenn man nur $n \geqq n''$ nimmt, oder aber $N_{m+1,n}$ verschwindet für unbegrenzt viele Werte von n. Im ersten Falle enthält der Kettenbruch

$$E_{m+1} \equiv \left[b_{m+1} + \frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_{m+2}^{\infty} \tag{3}$$

höchstens eine endliche Anzahl von sinnlosen Näherungsbrüchen, er ist also ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Kettenbruch; im zweiten Falle dagegen sind unbegrenzt viele seiner Näherungsbrüche sinnlos.

Indem wir nun zunächst den ersten Fall ins Auge fassen, denken wir uns in der Gleichung (2) $n \geqq n''$ genommen und setzen in der gewohnten Weise

$$K_{m+1,n} = \frac{Z_{m+1,n}}{N_{m+1,n}},$$

worauf sich die genannte Gleichung auf die Form

$$K_n = \frac{a_{m+1} Z_{m-1} + K_{m+1,n} Z_m}{a_{m+1} N_{m-1} + K_{m+1,n} N_m}$$

bringen läßt. Daraus folgt aber

$$(K_n N_m - Z_m) K_{m+1,n} = a_{m+1}(Z_{m-1} - K_n N_{m-1}). \tag{4}$$

Ist nun $|KN_m - Z_m| > 0$, also K von dem Näherungsbruche K_m verschieden, so folgt aus dieser Gleichung

$$E_{m+1} = \lim_{n=+\infty} K_{m+1,n} = \frac{a_{m+1}(Z_{m-1} - KN_{m-1})}{KN_m - Z_m};$$

der Kettenbruch E_{m+1} ist also in diesem Falle konvergent. Wenn dagegen $KN_m - Z_m = 0$ ist, so muß, da Z_m und N_m gemäß des Satzes 1) in X, 6 nicht zugleich verschwinden können, N_m notwendig von Null verschieden und demnach

$$K = \frac{Z_m}{N_m} = K_m$$

sein. Zufolge des Satzes 3) in X, 6 ist aber nunmehr $|Z_{m-1} - KN_{m-1}| > 0$, und da auch a_{m+1} von Null verschieden ist, so hat die rechte Seite der Gleichung (4) bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert. Somit folgt jetzt aus derselben

$$\lim_{n=+\infty} |K_{m+1,n}| = +\infty,$$

der Kettenbruch (3) ist also divergent.

Um auch den zweiten Fall zu erledigen, nehmen wir jetzt an, E_{m+1} enthalte eine unbegrenzte Anzahl von sinnlosen Näherungs-

brüchen. E_{m+1} ist dann selbstverständlich divergent und zwar unbestimmt. Da aber nicht zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsbrüche des Kettenbruches E_{m+1} zugleich sinnlos sein können, so enthält derselbe auch unendlich viele solche Näherungsbrüche, deren Nenner von Null verschieden sind. Es seien nun $n_1, n_2, \cdots n_r, \cdots$ jene Werte von n, wofür $N_{m+1,n_r} = 0$ ist, und zwar in ihrer natürlichen Anordnung genommen, so daß $n_{r+1} > n_r$ und

$$\lim_{r=+\infty} n_r = +\infty \tag{5}$$

ist. Dann ist Z_{m+1,n_r} von Null verschieden und die zweite Gleichung (1) ergibt

$$N_{n_r} = Z_{m+1,n_r} N_m. \tag{6}$$

Wegen (5) gibt es einen Wert r_0, so daß für $r \geqq r_0$ $n_r > n'$ und daher $|N_{n_r}| > 0$ ist. Somit ist zufolge (6) $|N_m| > 0$, also nach (2)

$$K_{n_r} = \frac{Z_{m+1,n_r} Z_m}{Z_{m+1,n_r} N_m} = \frac{Z_m}{N_m} = K_m.$$

Hieraus folgt aber wegen der Konvergenz des Kettenbruches K

$$K = \lim_{n=+\infty} K_n = \lim_{r=+\infty} K_{n_r} = K_m.$$

Halten wir nun die für die beiden Fälle gewonnenen Resultate zusammen, so können wir sagen: Wenn der Kettenbruch (3) für irgend einen Wert $m \geqq 1$ nicht konvergiert, so ist $K = K_m$, und umgekehrt zieht die Gleichheit von K und K_m jedesmal die Divergenz von E_{m+1} nach sich. Wenn demnach auch nur für einen einzigen Wert $m \geqq 1$ die Gleichung $K = K_m$ besteht, so ist der Kettenbruch K nur bedingt konvergent. Umgekehrt können wir jedoch aus dem Vorstehenden bloß schließen, daß, falls für keinen Wert $m \geqq 1$ $K = K_m$ ist, die sämtlichen Kettenbrüche $E_2, E_3, \ldots$ konvergent sind. Um unsern Satz vollständig zu erweisen, müssen wir daher noch das Verhalten des Kettenbruches

$$E_1 \equiv \left[b_1 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$$

untersuchen. Zufolge des Satzes in X, 4, S. 476 ist

$$K_n = b_0 + a_1 \frac{N_{1,n}}{Z_{1,n}};$$

wegen der Konvergenz von K muß der Quotient $N_{1,n} : Z_{1,n}$ bei $\lim n = +\infty$ einen endlichen Grenzwert besitzen. Ist derselbe eine von Null verschiedene Zahl g, so ist der Kettenbruch E_1 konvergent und zwar hat man

$$E_1 = \lim_{n=+\infty} \frac{Z_{1,n}}{N_{1,n}} = \frac{1}{g} \quad \text{und} \quad K = b_0 + a_1 g,$$

K ist also in diesem Falle von b_0 verschieden. Ist dagegen der genannte Grenzwert Null, so ist $K = b_0$, während E_1 unmöglich einen endlichen Grenzwert besitzen kann. Man sieht also, daß jedesmal, wenn K einem seiner Näherungsbrüche K_m $(m \geqq 0)$ gleich ist, E_{m+1} divergiert, also K selbst nur bedingt konvergent ist und umgekehrt, was zu beweisen war.

Beispiel. In dem Kettenbruche

$$K \equiv \frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{0} \dot{-} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{4}{0} \dot{-} \frac{4}{1} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n^2}{0} \dot{-} \frac{n^2}{1} \dot{-} \cdots$$

ist

$$Z_{2n} = 0, \; Z_{2n+1} = (-1)^n (n!)^2, \; N_{2n} = (-1)^n (n!)^2,$$
$$N_{2n+1} = (-1)^n (n+1)\,(n!)^2,$$

also

$$K_{2n} = 0 \quad \text{und} \quad K_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

woraus sich

$$\lim_{n=+\infty} K_{2n+1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=+\infty} K_n = 0$$

ergibt. Der Kettenbruch ist demnach konvergent und hat den Grenzwert $K = 0$, er konvergiert somit nur bedingt. Ferner ist derselbe wegen $K_{2n} = 0$ ein uneigentlicher Kettenbruch und man hat nach dem Satze 4) in X, 6, da hier, wenn m beliebig und $n > m$ genommen wird, $K_{2n} = K_{2m}(= 0)$ ist, $N_{2m+1,2n} = 0$. Somit ist hier jeder der Kettenbrüche E_{2m+1} $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ divergent und enthält unbegrenzt viele sinnlose Näherungsbrüche.

7. Alternierende unendliche Kettenbrüche.[1])

Wir betrachten jetzt einen Kettenbruch von der alternierenden Form

$$K \equiv b_0 - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{b_n} + \cdots, \tag{1}$$

worin die Teilnenner b_n lauter positive Zahlen bedeuten. Auch das Anfangsglied b_0, welches auf die Konvergenz oder Divergenz des Kettenbruches keinen Einfluß hat, wollen wir als positiv voraussetzen.

---

1) Vgl. Gmeiner, Monatshefte XIV (1903), S. 261 u. d. f. — Bezüglich derjenigen alternierenden Kettenbrüche $\left[b_0 + \frac{(-1)^\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, deren Elemente a_ν, b_ν sämtlich natürliche Zahlen $(\geqq 1)$ sind, vgl. auch Stern, Theorie der Kettenbrüche (1834) § 59.

Für die Näherungsnenner und Näherungszähler eines solchen Kettenbruches findet man mit Hilfe der Formeln (II) in X, 3 die Beziehungen

$$\left.\begin{gathered} N_0 = 1,\ N_1 = b_1,\ N_2 = b_1 b_2 + 1,\ N_3 = b_1(b_2 b_3 - 1) + b_3, \\ N_{2n} = b_{2n} N_{2n-1} + N_{2n-2}, \\ N_{2n+1} = b_{2n+1} N_{2n} - N_{2n-1} = (b_{2n} b_{2n+1} - 1) N_{2n-1} + b_{2n+1} N_{2n-2} \\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{gathered}\right\} \quad (2)$$

und ebenso

$$\left.\begin{gathered} Z_0 = b_0,\ Z_1 = b_0 b_1 - 1,\ Z_2 = b_2(b_0 b_1 - 1) + b_0, \\ Z_{2n} = b_{2n} Z_{2n-1} + Z_{2n-2}, \\ Z_{2n+1} = b_{2n+1} Z_{2n} - Z_{2n-1} = (b_{2n} b_{2n+1} - 1) Z_{2n-1} + b_{2n+1} Z_{2n-2} \\ (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{gathered}\right\} \quad (3)$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, daß sowohl die Näherungsnenner N_n als auch die Näherungszähler Z_n mit Ausnahme von Z_1 stets positiv sind, wenn die Elemente b_n die Bedingungen

$$b_{2n} b_{2n+1} \geqq 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \quad (4)$$

erfüllen. Bezüglich Z_1 hat man neben

$$b_0 b_1 \geqq 1 \quad \text{entsprechend} \quad Z_1 \geqq 0.$$

Im folgenden beschränken wir uns auf den Fall, daß der Kettenbruch (1) die Relationen (4) befriedigt. Die Näherungsbrüche zeigen dann ein ziemlich einfaches Verhalten, und es ist leicht, Bedingungen aufzustellen, unter denen der Kettenbruch konvergiert.

Mit Bezug auf den Kettenbruch (1) ergibt sich aus der Formel (VIII) in X, 5

$$K_{n+r} - K_n = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{Z_{n+2,n+r}}{N_n N_{n+r}} \quad (r \geqq 1), \quad (5)$$

worin im Falle, daß r den Wert 1 hat, $Z_{n+2,n+1} = 1$ zu setzen ist, während für jeden anderen Wert von r $Z_{n+2,n+r}$ den durch Reduktion sich ergebenden Zähler des Kettenbruches

$$K_{n+2,n+r} = b_{n+2} + \frac{(-1)^{n+3}}{b_{n+3}} + \frac{(-1)^{n+4}}{b_{n+4}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+r}}{b_{n+r}} \quad (6)$$

vorstellt. Lassen wir zunächst n gerade sein und setzen demgemäß $n = 2\nu$, so ist der Kettenbruch (6) ein alternierender mit genau denselben Eigenschaften wie (1). Daher ist $Z_{2\nu+2,2\nu+r}$ sicher positiv, wenn nur $r > 3$ ist. Für $r = 3$ hat man neben

$$b_{2\nu+2} b_{2\nu+3} \geqq 1 \quad \text{entsprechend} \quad Z_{2\nu+2,2\nu+3} \geqq 0.$$

Die Formel (5) lautet jetzt

$$K_{2\nu+r} - K_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{Z_{2\nu+2,2\nu+r}}{N_{2\nu} N_{2\nu+r}} \tag{7}$$

und daraus ergibt sich, indem man $\nu = 0$ nimmt,

$$0 < K_r < b_0 \quad (r > 3), \tag{8}$$

d. h.:

Satz 1. Der Kettenbruch (1), dessen Teilnenner die Bedingungen (4) erfüllen, ist entweder konvergent oder oszilliert zwischen zwei endlichen Grenzen. Der Grenzwert, bezw. die beiden Unbestimmtheitsgrenzen liegen im Intervalle $(0, b_0)$.

Die Formel (7) läßt ferner unmittelbar erkennen, daß

$$K_{4\mu+r} \leqq K_{4\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{9}$$

und

$$K_{4\mu+2+r} \geqq K_{4\mu+2} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

ist, und zwar gilt in diesen Relationen das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $r = 3$ und dabei

$$b_{4\mu+2} b_{4\mu+3} = 1, \quad \text{bezw.} \quad b_{4\mu+4} b_{4\mu+5} = 1$$

ist.

Für ungerade Werte $2\nu + 1$ von n nimmt die Formel (5) die Gestalt an

$$K_{2\nu+1+r} - K_{2\nu+1} = (-1)^{\nu} \frac{Z_{2\nu+3,2\nu+1+r}}{N_{2\nu+1} N_{2\nu+1+r}}; \tag{11}$$

hierin ist $Z_{2\nu+3,2\nu+1+r} = N_{2\nu+2,2\nu+1+r}$ der Nenner des Kettenbruches

$$K_{2\nu+2,2\nu+1+r} = b_{2\nu+2} - \frac{1}{b_{2\nu+3}} + \frac{1}{b_{2\nu+4}} - \cdots + \frac{(-1)^{r+1}}{b_{2\nu+r+1}},$$

welcher wieder die nämlichen Eigenschaften wie (1) besitzt, so daß man

$$Z_{2\nu+3,2\nu+1+r} > 0 \quad (r = 1, 2, 3, \cdots)$$

hat. Demnach folgt aus (11)

$$K_{4\mu+1+r} > K_{4\mu+1} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{12}$$

und

$$K_{4\mu+3+r} < K_{4\mu+3} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

und zwar für jeden Wert $r \geqq 1$. Aus (9) und (13) erhält man aber

$$K_{4\mu} \geqq K_{4\mu+3} > K_{4(\mu+1)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots) \tag{14}$$

und ebenso aus (10) und (12)

$$K_{4\mu+1} < K_{4\mu+2} \leqq K_{4(\mu+1)+1} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots). \tag{15}$$

Die einer und derselben Reihe von Ungleichungen (14) oder (15) entsprechenden K_r haben sicher für sich je einen endlichen Grenzwert, da sich dieselben mit wachsendem r stets in einem und demselben Sinne ändern und außerdem die Relation (8) besteht. Der Kettenbruch (2) ist daher dann und nur dann konvergent, wenn diese beiden Grenzwerte einander gleich sind. Hierzu ist aber notwendig und hinreichend, daß die Differenz $K_{2n+1} - K_{2n}$ bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null hat, eine Bedingung, welche, da nach (7)

$$|K_{2n+1} - K_{2n}| = \frac{1}{N_{2n} N_{2n+1}}$$

ist, mit der folgenden zusammenfällt:

$$\lim_{n=+\infty} N_{2n} N_{2n+1} = +\infty. \tag{16}$$

Aus den Ungleichungen (9) bis (15) ist noch zu ersehen, daß jeder in (14) vorkommende Näherungsbruch größer ist als jeder in (15) enthaltene. Einander gleiche Näherungsbrüche mit verschiedenem Index können sich demnach nur in der Weise ergeben, daß entweder $K_{4\mu} = K_{4\mu+3}$ oder $K_{4\mu+2} = K_{4\mu+5}$, also überhaupt für irgend einen Wert von n $K_{2n} = K_{2n+3}$ ist, was, wie wir gesehen haben, dann und nur dann zutrifft, wenn $b_{2n+2} b_{2n+3} = 1$ ist. Folglich gilt der Satz:

Satz 2. Der den Bedingungen (4) genügende, alternierende Kettenbruch (1) ist ein eigentlicher oder ein uneigentlicher Kettenbruch, je nachdem in den Relationen (4) das Gleichheitszeichen nur für eine begrenzte oder aber für eine unbegrenzte Anzahl von Werten n Geltung hat.

Hinsichtlich der Konvergenz der alternierenden Kettenbrüche lassen sich aus dem Vorstehenden die folgenden Sätze gewinnen.

Satz 3. „Der alternierende Kettenbruch (1) ist unbedingt konvergent, wenn

$$b_{2n} b_{2n+1} \geqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{17}$$

ist und außerdem die unendliche Reihe

$$b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n+1} + \cdots \tag{18}$$

divergiert. Sind diese Bedingungen erfüllt und ist überdies noch $b_0 b_1 \geqq 1$, so besteht für seinen Grenzwert K die Relation

$$0 < K < b_0.“ \tag{19}$$

Um den Satz zu beweisen, dürfen wir unbeschadet der Allgemeinheit b_0 der Bedingung $b_0 b_1 \geqq 1$ entsprechend annehmen, so daß die Relationen (4) ausnahmslos in Kraft bleiben. Es ist dann nur zu zeigen, daß die Beziehung (16) besteht. Dazu haben wir zunächst

$$N_{2n+2} = b_{2n+2} N_{2n+1} + N_{2n}, \tag{20}$$

woraus

$$N_{2n+2} > N_{2n} > N_{2n-2} > \cdots > N_2 > N_0 = 1 \tag{21}$$

folgt. Ferner ist nach (2)

$$N_{2n+3} = (b_{2n+2} b_{2n+3} - 1)\, N_{2n+1} + b_{2n+3} N_{2n},$$

also zufolge (17)

$$N_{2n+3} \geqq b_{2n+3} N_{2n}$$

und hieraus findet man mit Hilfe von (20) und (21)

$$N_{2n+2} N_{2n+3} > N_{2n} N_{2n+1} + b_{2n+3} \quad (n > 0)$$

und, der Beziehung $b_2 b_3 \geqq 1$ entsprechend, $N_2 N_3 \geqq N_0 N_1 + b_3$. Es ist also

$$\begin{aligned} N_0 N_1 &= b_1 \\ N_2 N_3 &\geqq N_0 N_1 + b_3 \\ N_4 N_5 &> N_2 N_3 + b_5 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ N_{2n} N_{2n+1} &> N_{2n-2} N_{2n-1} + b_{2n+1} \end{aligned}$$

und durch Addition dieser Relationen erhält man

$$N_{2n} N_{2n+1} > b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n+1},$$

woraus sich durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ unter Voraussetzung der Divergenz der Reihe (18) die Beziehung (16) ergibt.

Hiermit ist die Konvergenz des Kettenbruches (1) unter den angegebenen Bedingungen nachgewiesen. Sein Grenzwert ist kleiner als jeder in den Relationen (14) und größer als jeder in (15) vorkommende Näherungsbruch, somit von dem Werte eines jeden Näherungsbruches verschieden. Der Kettenbruch konvergiert demnach unbedingt. Schließlich hat man noch $0 < K_1 < K < K_0 = b_0$, wodurch auch die Relation (19) ihre Bestätigung erhält.

Satz 4. Der alternierende Kettenbruch (1) ist unbedingt konvergent, wenn

$$b_{2n} b_{2n+1} = 1 + \delta_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{22}$$

ist, worin keine der reellen Zahlen δ_n negativ sein soll, und wenn außerdem die unendliche Reihe

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n + \cdots \tag{23}$$

divergiert.

Beweis. Auch hier nehmen wir zur Vereinfachung des Beweises b_0 der Bedingung $b_0 b_1 \geqq 1$ entsprechend an und bemerken, daß die Bedingungen (22) mit den früheren (17) übereinstimmen. Es ist dann

$$N_{2n+2} = b_{2n+2} N_{2n+1} + N_{2n} > b_{2n+2} N_{2n+1}$$

und

$$N_{2n+3} = (b_{2n+2} b_{2n+3} - 1) N_{2n+1} + b_{2n+3} N_{2n} \geqq b_{2n+3} N_{2n},$$

also

$$N_{2n+2} N_{2n+3} > b_{2n+2} b_{2n+3} N_{2n} N_{2n+1},$$

somit zufolge (22)

$$N_{2n+2} N_{2n+3} > (1 + \delta_{n+1}) N_{2n} N_{2n+1}.$$

Demgemäß hat man

$$\begin{aligned} N_0 N_1 &= b_1 \\ N_2 N_3 &> (1 + \delta_1) N_0 N_1 \\ N_4 N_5 &> (1 + \delta_2) N_2 N_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ N_{2n} N_{2n+1} &> (1 + \delta_n) N_{2n-2} N_{2n-1}, \end{aligned}$$

woraus sich durch Multiplikation

$$N_{2n} N_{2n+1} > b_1 \prod_1^n (1 + \delta_r)$$

ergibt. Da die Reihe (23) divergiert, so hat das Produkt auf der rechten Seite dieser Ungleichung bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$. Es ist demnach auch

$$\lim N_{2n} N_{2n+1} = +\infty,$$

womit die Konvergenz des Kettenbruches erwiesen ist. Daß die Konvergenz auch hier eine unbedingte ist, ergibt sich in derselben Weise wie beim vorausgehenden Satze.

Die vorstehenden Sätze lassen sich leicht auf alternierende Kettenbrüche von der allgemeinen Form $\left[b_0 + \frac{(-1)^r a_r}{b_r}\right]_1^\infty$ und daher auch auf solche von der besonderen Form $\left[b_0 + \frac{(-1)^r a_r}{1}\right]_1^\infty$ übertragen. (Vgl. die Übungen 18) bis 22)).

8. Konvergente Kettenbrüche mit komplexen Elementen. Konvergenzsätze von Pringsheim.[1])

Um auch für solche Kettenbrüche, deren Elemente entweder durchwegs oder doch zum Teil komplexe Zahlen sind, Konvergenzkriterien zu gewinnen, betrachten wir zunächst den Kettenbruch

---

1) Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 28 (1898), S. 312 u. d. f. Die in dieser Nummer vorgeführten Sätze sind sämtlich von Pringsheim. Von uns hinzugefügt sind die Bemerkungen, die sich auf die Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Kettenbrüchen beziehen.

$$K \equiv \frac{\varepsilon_1 a_1}{b_1} \dotplus \frac{\varepsilon_2 a_2}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{\varepsilon_n a_n}{b_n} \dotplus \cdots, \tag{1}$$

worin die a_n und b_n positive Zahlen bedeuten, während die ε_n reelle oder komplexe Zahlen vom absoluten Betrage 1 vorstellen. Für Kettenbrüche von dieser Gestalt gilt nun, wie Pringsheim gezeigt hat, der folgende Satz, der als die naturgemäße Verallgemeinerung des am Eingange von Nr. 5 aufgestellten Satzes auf den Kettenbruch (1) erscheint.

Satz 1a. Der Kettenbruch (1) konvergiert, und zwar unbedingt, wenn darin

$$b_n \geqq a_n + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

ist. Falls dabei die unendliche Reihe

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n + \cdots$$

divergiert und außerdem für jeden Wert $n \geqq 1$

$$b_n = a_n + 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{n+1} = -1 \tag{3}$$

ist, hat man $K = \varepsilon_1$, während in jedem anderen Falle $0 < |K| < 1$ ist.

Beweis. In dem Kettenbruche (1) ist $N_0 = 1$ und $N_1 = b_1$, also zufolge (2) $N_1 - N_0 = b_1 - 1 \geqq a_1$ oder, was hier dasselbe ist,

$$|N_1| - |N_0| \geqq a_1. \tag{4}$$

Nach der zweiten Formel (II) in X, 3 ist ferner für $p \geqq 2$

$$|N_p| = |b_p N_{p-1} + \varepsilon_p a_p N_{p-2}| \geqq b_p |N_{p-1}| - a_p |N_{p-2}|,$$

woraus sich mit Rücksicht auf (2)

$$|N_p| - |N_{p-1}| \geqq a_p \{|N_{p-1}| - |N_{p-2}|\} \tag{5}$$

ergibt. Alle hier auftretenden Differenzen sind zufolge (4) positiv. Denken wir uns nun die Relationen (5) nacheinander für $p = 2, 3, \ldots n$ angeschrieben und in entsprechender Weise miteinander multipliziert, wobei auch die Relation (4) mit einzubeziehen ist, so erhalten wir nach Entfernung der überflüssigen Faktoren

$$|N_n| - |N_{n-1}| \geqq a_1 a_2 \cdots a_n. \tag{6}$$

Hierzu möge vor allem bemerkt sein, daß in (6) das Gleichheitszeichen dann und nur zur Geltung kommt, wenn dasselbe sowohl in (4) als auch in jeder der Relationen (5) für $p = 2, 3, \ldots n$ gültig ist. Dies ist aber offenbar dann und nur dann der Fall, wenn außer $b_1 = a_1 + 1$ auch $b_p = a_p + 1$ und $\varepsilon_p = -1$ für $p = 2, 3, \ldots n$ ist. Wenn dagegen auch nur für einen einzigen Wert $n = m$ nicht beide Gleichungen (3) bestehen, so ist in (6) das Ungleichheitszeichen für alle Werte $n \geqq m$ zu setzen.

Die Beziehungen (6) besagen uns nun zunächst, daß die Näherungsnenner N_n ihrem absoluten Betrage nach mit wachsendem n beständig zunehmen. Dieselben sind daher wegen $N_1 = b_1$ sämtlich von Null verschieden und $|N_n|$ hat bei $\lim n = +\infty$ entweder einen endlichen positiven Grenzwert g oder den Grenzwert $+\infty$. Zufolge der ersteren Eigenschaft dieser Nenner kann man den Kettenbruch K in eine äquivalente Reihe verwandeln, und zwar lautet dieselbe gemäß der Formel (6) in Nr. 2

$$\frac{\varepsilon_1 a_1}{b_1} - \frac{\varepsilon_1 a_1 \cdot \varepsilon_2 a_2}{N_1 N_2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon_1 a_1 \cdot \varepsilon_2 a_2 \cdots \varepsilon_n a_n}{N_{n-1} N_n} + \cdots \qquad (7)$$

Bezeichnen wir mit S_n die Summe aus den absoluten Beträgen der ersten n Glieder dieser Reihe, so haben wir zufolge (6)

$$S_n = \sum_1^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{|N_{r-1} N_r|} \leqq \sum_1^n \frac{|N_r| - |N_{r-1}|}{|N_{r-1}| \cdot |N_r|} = \sum_1^n \left(\frac{1}{|N_{r-1}|} - \frac{1}{|N_r|} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{b_1}\right) + \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{|N_2|}\right) + \left(\frac{1}{|N_2|} - \frac{1}{|N_3|}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{|N_{n-1}|} - \frac{1}{|N_n|}\right);$$

also

$$S_n \leqq 1 - \frac{1}{|N_n|}.$$

Somit ist

$$\lim_{n=+\infty} S_n \leqq 1 - \frac{1}{g} \quad \text{oder} \quad \lim_{n=+\infty} S_n \leqq 1, \qquad (8)$$

je nachdem $|N_n|$ den Grenzwert g oder $+\infty$ hat. In jedem Falle ist die Reihe (7) absolut konvergent, also konvergiert auch der mit ihr äquivalente Kettenbruch (1).

Daß die Konvergenz des letzteren eine unbedingte ist, erkennt man unmittelbar aus den Bedingungen (2). Denn jeder aus (1) durch Weglassung beliebiger Glieder entstehende Kettenbruch erfüllt wieder diese Bedingungen, wenn der ursprüngliche Kettenbruch ihnen genügt hat. Daraus folgt auch schon, daß K nicht Null sein kann; denn wegen $K_0 = b_0 = 0$ hätte man sonst $K = K_0$, und das ist nach dem Satze der 6. Nummer, da K unbedingt konvergiert, nicht möglich.

Der Grenzwert der Reihe (7), also K, ist absolut genommen niemals größer als der Grenzwert der aus den absoluten Beträgen ihrer Glieder gebildeten Reihe, und auch die Gleichheit dieser beiden Größen besteht ausschließlich in dem Falle, wo die Glieder der Reihe (7) sämtlich einen und denselben Richtungsfaktor besitzen, was nur dann zutrifft, wenn $\varepsilon_n = -1$ ist für alle Werte $n \geqq 2$. In allen übrigen Fällen ist sicher $0 < |K| < \lim S_n$, also zufolge (8) $0 < |K| < 1$. Wenn aber von $n = 2$ angefangen durchweg $\varepsilon_n = -1$ ist, so lautet der Kettenbruch (1)

$$K \equiv \varepsilon_1 \left(\frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-} \cdots \right),$$

worin der in der Klammer befindliche Kettenbruch nun den Bedingungen des eingangs von Nr. 5 bewiesenen Satzes entspricht, so daß der noch erübrigende Teil des vorliegenden Satzes durch den bloßen Hinweis auf jenen Satz seine volle Erledigung findet.

Zu dem vorstehenden Satze kann man noch die Bemerkung hinzufügen, daß der den Bedingungen (2) unterworfene Kettenbruch (1) stets ein eigentlicher Kettenbruch ist; denn die Nenner $N_{m,n}$ der Kettenbrüche

$$\left[b_m + \frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{b_\nu} \right]_{m+1}^{n}$$

haben genau dieselben Eigenschaften wie die N_n, so daß keiner von ihnen verschwinden kann. (Vgl. Satz 4) in X, 6.)

Auf die Form (1) läßt sich jeder aus beliebigen reellen oder komplexen Elementen a_ν, b_ν bestehende Kettenbruch $K \equiv \left[\frac{a_\nu}{b_\nu} \right]_1^\infty$, dessen Anfangsglied Null ist, bringen. Denn sind α_ν, β_ν die Richtungsfaktoren von a_ν und b_ν, also

$$a_\nu = \alpha_\nu |a_\nu|, \quad b_\nu = \beta_\nu |b_\nu|, \quad |\alpha_\nu| = |\beta_\nu| = 1,$$

so hat man

$$K \equiv \left[\frac{\alpha_\nu |a_\nu|}{\beta_\nu |b_\nu|} \right]_1^\infty,$$

woraus man mit Hilfe der Formel (8) in Nr. 2 erkennt, daß K mit

$$\left[\frac{\varepsilon_\nu |a_\nu|}{|b_\nu|} \right]_1^\infty$$

äquivalent ist, worin $\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, dagegen $\varepsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu}$ für $\nu \geqq 2$ ist. Dieser letzte Kettenbruch ist aber von der Form (1). Man kann daher nunmehr den obigen Satz durch den formell allgemeineren ersetzen:

Satz. 1b. Bedeuten a_n, b_n reelle oder komplexe Zahlen mit den Richtungsfaktoren α_n, β_n, so ist der Kettenbruch

$$K \equiv \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \cdots$$

unbedingt konvergent und dabei ein eigentlicher Kettenbruch, wenn

$$|b_n| - |a_n| \geqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{9}$$

ist, und man hat stets $0 < |K| < 1$, außer wenn durchwegs

$$|b_n| - |a_n| = 1 \quad \text{und} \quad \beta_n \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \quad (n \geqq 1)$$

ist und zugleich die Reihe

$$1 + |a_1| + |a_1 a_2| + \cdots + |a_1 a_2 \cdots a_n| + \cdots$$

divergiert. In diesem Ausnahmsfalle ist $K = \alpha_1 : \beta_1$, also $|K| = 1$.

Aus diesem Satze hat Pringsheim für die Kettenbrüche von den beiden Formen $\left[\frac{\pm 1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ Konvergenzkriterien von noch größerer Allgemeinheit abgeleitet. Es sind im wesentlichen die folgenden, wobei wir die erstgenannte Form durch die etwas allgemeinere $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ $(|\varepsilon_\nu| = 1)$ ersetzen.

Satz 2. „Haben in dem Kettenbruche $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ alle ε_ν den absoluten Betrag 1 und erfüllen die reellen oder komplexen Zahlen b_ν die Bedingungen

$$\left|\frac{1}{b_{2n-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2n}}\right| \leqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{10}$$

so konvergiert derselbe unbedingt und ist ein eigentlicher Kettenbruch. Sein Grenzwert liegt absolut genommen im Intervalle (0, 1) mit Ausschluß des Wertes Null."

Beweis. $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist äquivalent mit

$$\left[\frac{\varepsilon_1 c_1}{c_1 b_1} \dot{+} \frac{\varepsilon_\nu c_{\nu-1} c_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty, \tag{11}$$

worin die c_ν beliebige von Null verschiedene Zahlen bedeuten können. Nimmt man $c_{2n} = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, so hat der letztere Kettenbruch die Gestalt

$$\frac{\varepsilon_1 c_1}{c_1 b_1} \dot{+} \frac{\varepsilon_2 c_1}{b_2} \dot{+} \frac{\varepsilon_3 c_3}{c_3 b_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\varepsilon_{2n-1} c_{2n-1}}{c_{2n-1} b_{2n-1}} \dot{+} \frac{\varepsilon_{2n} c_{2n-1}}{b_{2n}} \dot{+} \cdots \tag{12}$$

Wir versuchen nun die Zahlen $c_1, c_3, c_5, \ldots$ so zu bestimmen, daß der Kettenbruch die Bedingungen (9) erfüllt. Da es dabei bloß auf die absoluten Beträge der Elemente ankommt, so kann man die c_{2n-1} zum vorhinein als reell und positiv annehmen. Die Bedingungen (9) verlangen dann, daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$c_{2n-1}\{|b_{2n-1}| - 1\} \geqq 1 \quad \text{und} \quad |b_{2n}| - c_{2n-1} \geqq 1$$

sei. Man kann daher $c_{2n-1} = |b_{2n}| - 1$ setzen, worauf

$$\{|b_{2n-1}| - 1\} \cdot \{|b_{2n}| - 1\} \geqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

sein muß. Diese Relationen sind aber, wie eine einfache Umformung derselben zeigt, mit den Bedingungen (10) identisch. Somit ist der

Kettenbruch (12) nach dem Satze 1b ein eigentlicher und unbedingt konvergent, und dasselbe gilt von jedem mit ihm äquivalenten Kettenbruche, also auch von $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$. Auch daß der Grenzwert des letzteren absolut genommen im Intervalle (0, 1) liegt, folgt unmittelbar aus dem Satze 1b.

Satz 3. „Genügen die reellen oder komplexen Zahlen a_ν den Bedingungen

$$|a_2| < \tfrac{1}{2},\ |a_{2n-1}| + |a_{2n}| \leqq \tfrac{1}{2}\quad (n = 2, 3, 4, \cdots), \tag{13}$$

so ist $K \equiv \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ein eigentlicher und unbedingt konvergenter Kettenbruch. Falls außerdem noch

$$|a_1| + |a_2| \leqq \tfrac{1}{2} \tag{14}$$

ist, liegt $|K|$ im Intervalle $(0, \frac{1}{2})$ mit Ausschluß des Wertes Null."

Beweis. Wir verwandeln $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ in einen äquivalenten Kettenbruch

$$\left[\frac{c_1 a_1}{c_1} + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu}\right]_2^\infty, \tag{15}$$

in welchem wir die Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots$ so zu bestimmen trachten, daß dieser letztere Kettenbruch die Bedingungen (9) erfüllt. Ein Blick auf diese Bedingungen zeigt uns, daß dann jedenfalls $|c_\nu| > 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ genommen werden muß. Aus diesem Grunde setzen wir, um einen möglichst einfachen Kettenbruch zu erhalten, $c_{2n} = 2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und multiplizieren den Kettenbruch (15) noch mit 2, wodurch er die Gestalt

$$\frac{2c_1 a_1}{c_1} + \frac{2c_1 a_2}{2} + \cdots + \frac{2c_{2n-1} a_{2n-1}}{c_{2n-1}} + \frac{2c_{2n-1} a_{2n}}{2} + \cdots \tag{16}$$

erhält. Soll derselbe den Bedingungen (9) entsprechen, so muß, wenn wir uns die c_{2n-1} wieder als reell und positiv denken,

$$2 - 2c_{2n-1} \cdot |a_{2n}| \geqq 1 \quad \text{und} \quad c_{2n-1}(1 - 2|a_{2n-1}|) \geqq 1$$

sein. Setzt man zufolge der ersten dieser Relationen $c_{2n-1} = 1 : 2|a_{2n}|$, so lautet die zweite

$$1 - 2|a_{2n-1}| \geqq 2|a_{2n}|, \text{ d. i. } |a_{2n-1}| + |a_{2n}| \leqq \tfrac{1}{2}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Nach dem Satze 1b ist demnach der Kettenbruch (16) ein eigentlicher und unbedingt konvergent, wenn die Bedingungen (13) und (14) zugleich erfüllt sind, und sein Grenzwert liegt absolut genommen im Intervalle (0, 1) mit Ausschluß der Null. Die nämlichen Eigenschaften muß daher auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ besitzen, dessen Wert

K die Hälfte des Wertes von [illegible] ist, also der Relation $1 < K \leq \frac{1}{2}$ genügt. Da, wie schon in Nr. 2 bemerkt wurde, der erste Teilzähler a_1 auf die Konvergenz oder Divergenz des Kettenbruches keinen Einfluß hat, so genügt es, wenn statt der Bedingung 14 nur die Relation $a_2 < \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

9. Fortsetzung. Satz nach Van Vleck.

In der vorigen Nummer, sowie schon bei früherer Gelegenheit in Nr. 2, wurde die Eulersche Reihenentwicklung eines Kettenbruches $K = \left[b_0 - \frac{a_1}{b_1}\right]^{-\infty}$ dazu benützt, um über das Verhalten von K_n bei $\lim n = -\infty$ Aufschluß zu erlangen. In Fällen, wo diese Methode nicht zum Ziele führt, kann man es mit der Verwandlung von K in zwei oder mehrere nicht-äquivalente Reihen versuchen, deren Partialsummen in ihrer Gesamtheit genommen die sämtlichen Näherungsbrüche K_n wenigstens von einem bestimmten Werte des Zeigers n an wiedergeben. Solche Reihen erhält man in der einfachsten Weise dadurch, daß man anstatt von der Formel (VI) in X, 5, welche der Eulerschen Reihenentwicklung zugrunde liegt, von der allgemeineren Formel (VIII) dortselbst ausgeht.

Setzt man in der zuletzt genannten Formel $r = 2$ und $k = n$, so lautet dieselbe

$$K_{n+2} - K_n = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1} b_{n+2}}{N_n N_{n+2}}.$$

Diese Formel ist gültig, wenn nur von den Zahlen N_n und N_{n+2} keine verschwindet. Der Entwicklung des Kettenbruches in eine Reihe muß daher die Untersuchung über die Beschaffenheit der Näherungsnenner N_n vorausgehen. Verschwindet N_n für keinen Wert $n \geq m$, so hat man

$$K_{m+2p} =$$
$$-K_m + (K_{m+2} - K_m) + (K_{m+4} - K_{m+2}) + \cdots + (K_{m+2p} - K_{m+2p-2}),$$

also gemäß der vorstehenden Gleichung

$$K_{m+2p} = K_m + (-1)^m \sum_1^p {}_r \frac{a_1 a_2 \cdots a_{m+2r-1} b_{m+2r}}{N_{m+2r-2} N_{m+2r}}.$$

Läßt man in dieser Formel p alle Werte 1, 2, 3, 4, ... durchlaufen, so liefert dieselbe alle Näherungsbrüche von K mit geradem oder aber alle mit ungeradem Index, je nachdem m selbst gerade oder ungerade ist, und zwar von K_m angefangen. Dem Kettenbruche K entsprechen auf diese Weise zwei unendliche Reihen

$$K_{2\mu} + \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2\mu+2r-1} b_{2\mu+2r}}{N_{2\mu+2r-2} N_{2\mu+2r}}$$

und (1)

$$K_{2\mu+1} - \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{2\mu+2r} b_{2\mu+2r+1}}{N_{2\mu+2r-1} N_{2\mu+2r+1}}.$$

Da die erste dieser beiden Reihen im Falle der Konvergenz dem Grenzwerte der geradstelligen, die andere jenem der ungeradstelligen Näherungsbrüche von K gleich ist, so ist der Kettenbruch K dann und nur dann konvergent, wenn die beiden Reihen konvergieren und den nämlichen Grenzwert besitzen. Zur Konvergenz des Kettenbruches K ist daher auch notwendig und hinreichend, daß die eine der Reihen (1) konvergiert und

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{N_{n-1} N_n} = 0 \tag{2}$$

ist. Denn wenn dies zutrifft, so konvergiert gemäß der Formel (VI) in X, 5 auch die andere Reihe und hat den nämlichen Grenzwert, während auch umgekehrt aus der Konvergenz der beiden Reihen und der Gleichheit ihrer Grenzwerte sich die Beziehung (2) mit Notwendigkeit ergibt.

Wir lassen im folgenden K einen Kettenbruch von der Hauptform $\left[b_0 + \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ sein; dann nehmen die Reihen (1) die einfachere Gestalt

$$K_{2\mu} + \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{b_{2\mu+2r}}{N_{2\mu+2r-2} N_{2\mu+2r}}$$

und (3)

$$K_{2\mu+1} - \sum_{1}^{\infty}{}_{r} \frac{b_{2\mu+2r+1}}{N_{2\mu+2r-1} N_{2\mu+2r+1}}$$

an und die Beziehung (2) wird gleichbedeutend mit

$$\lim_{n=+\infty} |N_{n-1} N_n| = +\infty. \tag{4}$$

Mittels der durch die vorstehende Erörterung gekennzeichneten Methode gewinnt man nach Van Vleck den folgenden Satz:[1])

1) E. B. Van Vleck, Transactions of the American mathematical society, Vol. 2 (1901), S. 223. Der Satz lautet dort (deutsch wiedergegeben): „Wenn in dem Kettenbruche $\left[\frac{1}{\alpha_\nu + i\beta_\nu}\right]_1^\infty$ alle α_ν das nämliche Vorzeichen haben und die β_ν in ihrem Vorzeichen alternieren, so konvergiert der Kettenbruch unbedingt, falls die Reihe $\Sigma|\alpha_\nu + i\beta_\nu|$ divergent ist.“ Dazu findet sich dortselbst S. 222

Satz. „Der Kettenbruch

$$K \equiv b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} + \cdots, \tag{5}$$

worin die b_n reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, habe die folgenden Eigenschaften:

1) Die Reihe $\sum_1^\infty |b_n|$ sei divergent. Setzt man $b_n = \alpha_n + \beta_n i$, so ist demnach von den beiden Reihen

$$A \equiv \sum_1^\infty |\alpha_n| \quad \text{und} \quad B \equiv \sum_1^\infty |\beta_n| \tag{6}$$

mindestens die eine divergent.

2) Die α_n sollen sämtlich gleichbezeichnet sein, während die β_n in ihrem Vorzeichen abwechseln, so daß β_n und β_{n+1} stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Dabei dürfen einzelne oder auch unbegrenzt viele von den Koeffizienten α_n und β_n verschwinden, und es ist dann jeder verschwindende Koeffizient α_n oder β_n als mit demjenigen Vorzeichen behaftet anzusehen, welches ein an seine Stelle gesetzter, nicht verschwindender Koeffizient haben müßte.

3a) Falls die Reihe A divergiert, sei von den α_n mit ungeradem Index mindestens eines von Null verschieden. Ebenso gebe es im Falle der Divergenz der Reihe B mindestens ein nicht verschwindendes β_n mit ungeradem Index.

Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch K. Die Konvergenz ist eine unbedingte, wenn die Bedingung 3a) durch die folgende ersetzt wird:

3b) Falls die Reihe A divergiert, seien sowohl unter den α_n mit ungeradem als auch unter jenen mit geradem Index unbegrenzt viele nicht verschwindende vorhanden, und dasselbe soll bezüglich der β_n gelten, falls B divergiert.

Der Kettenbruch ist ein eigentlicher oder ein uneigentlicher, je nachdem die Anzahl der verschwindenden Teilnenner b_n begrenzt oder unbegrenzt ist.“

---

noch die Bemerkung, daß auch verschwindende Koeffizienten (α_ν und β_ν) zulässig seien, denen dann dasjenige Vorzeichen zuzuschreiben sei, welches dem von ihnen eingenommenen Platze entspricht. In dieser Fassung ist jedoch der Satz unrichtig oder unvollständig; denn die Bedingungen desselben erfüllt beispielsweise auch der periodische Kettenbruch $\frac{1}{0} + \frac{1}{b} + \frac{1}{0} + \frac{1}{b} + \cdots$, der gewiß nicht konvergiert, da in demselben $N_{2n+1} = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist.

Beweis. Bezeichnet man mit $\bar{b}_n$ und $\bar{N}_n$ die Konjugierten zu b_n und N_n, so hat man, da mit Rücksicht auf die Form des Kettenbruches (5)

$$N_n = b_n N_{n-1} + N_{n-2} \quad (n \geqq 2) \tag{7}$$

ist,

$$|N_n|^2 = N_n \cdot \bar{N}_n = (b_n N_{n-1} + N_{n-2})(\bar{b}_n \bar{N}_{n-1} + \bar{N}_{n-2}) =$$
$$= |b_n|^2 \cdot |N_{n-1}|^2 + |N_{n-2}|^2 + b_n N_{n-1} \bar{N}_{n-2} + \bar{b}_n N_{n-2} \bar{N}_{n-1},$$

mithin wegen $b_n = \alpha_n + \beta_n i$ und $\bar{b}_n = \alpha_n - \beta_n i$

$$|N_n|^2 = |b_n|^2 \cdot |N_{n-1}|^2 + |N_{n-2}|^2 + \alpha_n C_{n-1} + \beta_n D_{n-1}, \tag{8}$$

worin

$$C_n = N_n \bar{N}_{n-1} + N_{n-1} \bar{N}_n \quad \text{und} \quad D_n = i(N_n \bar{N}_{n-1} - N_{n-1} \bar{N}_n) \tag{9}$$

gesetzt erscheint. Zwischen den reellen Größen C_n und D_n besteht die Beziehung

$$C_n^2 + D_n^2 = 4 |N_{n-1} N_n|^2, \tag{10}$$

welche sich aus den Gleichungen (9) durch Quadrieren und darauffolgende Addition ergibt. Andererseits lassen sich C_n und D_n durch N_{n-1} und C_{n-1} bezw. D_{n-1} ausdrücken. Denn aus (7) und (9) findet man

$$C_n = (b_n N_{n-1} + N_{n-2}) \bar{N}_{n-1} + N_{n-1}(\bar{b}_n \bar{N}_{n-1} + \bar{N}_{n-2}) =$$
$$= (b_n + \bar{b}_n) |N_{n-1}|^2 + N_{n-1} \bar{N}_{n-2} + N_{n-2} \bar{N}_{n-1},$$

also

$$C_n = 2\alpha_n |N_{n-1}|^2 + C_{n-1}, \tag{11}$$

und ebenso

$$D_n = i\{(b_n N_{n-1} + N_{n-2}) \bar{N}_{n-1} - N_{n-1}(\bar{b}_n \bar{N}_{n-1} + \bar{N}_{n-2})\} =$$
$$= i(b_n - \bar{b}_n) |N_{n-1}|^2 - i(N_{n-1} \bar{N}_{n-2} - N_{n-2} \bar{N}_{n-1}),$$

d. i.

$$D_n = -2\beta_n |N_{n-1}|^2 - D_{n-1}. \tag{12}$$

Da nun

$$N_0 = \bar{N}_0 = 1, \quad N_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad \bar{N}_1 = \alpha_1 - \beta_1 i \tag{13}$$

und daher zufolge (9)

$$C_1 = 2\alpha_1 \quad \text{und} \quad D_1 = -2\beta_1 \tag{14}$$

ist, so gewinnt man aus (11), beziehungsweise (12) in leicht ersichtlicher Weise die Formeln

$$C_n = 2 \sum_1^n \alpha_r |N_{r-1}|^2, \quad D_n = -2 \sum_1^n (-1)^{n-r} \beta_r |N_{r-1}|^2. \tag{15}$$

Im vorliegenden Falle, wo der Kettenbruch die Bedingung 2) erfüllt, sind die Glieder einer jeden dieser beiden Summen sämtlich gleich bezeichnet, so daß

$$|C_n| = 2\sum_1^n |\alpha_r| \cdot |N_{r-1}|^2, \quad |D_n| = 2\sum_1^n |\beta_r| \cdot |N_{r-1}|^2 \quad (16)$$

ist. Ferner ist in unserem Falle $\alpha_n C_{n-1} \geqq 0$ und $\beta_n D_{n-1} \geqq 0$ und daher nach (8)

$$|N_n|^2 \geqq |b_n|^2 \cdot |N_{n-1}|^2 + |N_{n-2}|^2. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich zunächst wegen $N_0 = 1$.

$$1 \leqq |N_2| \leqq |N_4| \leqq \cdots \leqq |N_{2n}| \leqq \cdots \quad (18)$$

Weil zufolge der Bedingung 1) mindestens die eine der beiden Reihen A und B divergiert, so ist gemäß der Voraussetzung 3a) mindestens eine von den Zahlen b_{2n+1} von Null verschieden. Falls $|b_1| > 0$ ist, hat man nach (17) unmittelbar

$$|N_{2n+1}| \geqq |b_1| > 0.$$

Falls dagegen $b_1 = 0$ ist, sei $2\mu + 1$ der erste ungerade Index, wofür $|b_{2\mu+1}| > 0$ ist. Man hat dann zufolge (17) und (18) für $\nu \geqq \mu$

$$|N_{2\nu+1}| \geqq |b_{2\mu+1}| > 0;$$

somit sind von der Stelle $n = 2\mu + 1$ an die sämtlichen Näherungsnenner N_n von Null verschieden, und zwar hat man für alle Werte von n, welche nicht unter $2\mu + 1$ liegen, $|N_n| \geqq \gamma$, wenn γ die kleinere von den beiden Zahlen 1 und $|b_{2\mu+1}|$ bedeutet. Bezeichnet man mit m eine natürliche Zahl größer als $2\mu + 1$, so ist für $n \geqq m$ nach (16)

$$|C_n| \geqq 2\gamma^2 \sum_m^n |\alpha_r| \quad \text{und} \quad |D_n| \geqq 2\gamma^2 \sum_m^n |\beta_r|.$$

Gemäß der Voraussetzung 1) hat demnach von den beiden Größen $|C_n|$ und $|D_n|$ mindestens die eine beim Grenzübergange $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$, so daß für unseren Kettenbruch aus der Gleichung (10) sich die Beziehung (4) ergibt.

Nun haben wir die Reihen (3) bezüglich ihrer Konvergenz zu untersuchen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Reihe

$$H \equiv \sum_m^\infty \frac{|b_r|}{|N_{r-2} N_r|} \quad (m > 2\mu + 2);$$

diese konvergiert dann und nur dann, wenn jede der beiden Reihen

$$A' \equiv \sum_m^\infty \frac{|\alpha_r|}{|N_{r-2} N_r|} \quad \text{und} \quad B' \equiv \sum_m^\infty \frac{|\beta_r|}{|N_{r-2} N_r|}$$

konvergent ist. Fassen wir zunächst die Reihe A' ins Auge, so können wir sogleich bemerken, daß dieselbe, da $|N_r| \geqq \gamma$ für $r \geqq m$

ist, sicher konvergiert, wenn die Reihe A [Formeln (6)] konvergent ist. Wir haben also nur noch den Fall zu betrachten, wo A divergiert. In diesem Falle gibt es nach Voraussetzung 3a) mindestens einen ungeraden Index $2\mu_1 + 1$, wofür $|\alpha_{2\mu_1+1}| > 0$ ist. Wenn wir daher in dem Kettenbruche (5) die sämtlichen Teilnenner b_n so verändern, daß wir darin $\beta_n = 0$ setzen, so bekommen wir einen neuen Kettenbruch

$$K^0 \equiv b_0 + \frac{1}{\alpha_1} \dotplus \frac{1}{\alpha_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{\alpha_n} \dotplus \cdots,$$

der ebenfalls die Bedingungen 1), 2) und 3a) erfüllt. Bezeichnen wir die ihm entsprechenden Größen N_n, C_n, D_n mit N_n^0, C_n^0, D_n^0, so werden mit Bezug auf diesen Kettenbruch die Gleichungen (15) zu

$$C_n^0 = 2 \sum_1 \alpha_r |N_{r-1}|^2, \quad D_n^0 = 0. \tag{15^0}$$

Die Gleichung (8) geht über in

$$|N_n^0|^2 = \alpha_n^2 |N_{n-1}^0|^2 + |N_{n-2}^0|^2 + \alpha_n C_{n-1}^0 \tag{8^0}$$

und die Gleichung (10) lautet daher jetzt

$$|C_n^0| = 2 |N_n^0 N_{n-1}^0|. \tag{10^0}$$

Stellt man die Gleichungen (8^0) und (15^0) den ursprünglichen (8) und (15) gegenüber, so erkennt man sofort, daß

$$|N_n^0| \leqq |N_n| \tag{19}$$

ist, während auch jetzt noch die Beziehung (4), d. i.

$$\lim_{n=+\infty} |N_{n-1}^0 N_n^0| = +\infty \tag{20}$$

in Kraft bleibt. Aus (8^0) und (10^0) folgt aber

$$|N_n^0| = |\alpha_n| \cdot |N_{n-1}^0| + |N_{n-2}^0|,$$

so daß für alle Werte $n \geqq 2\mu_1 + 3$

$$\frac{1}{|N_{n-2}^0 N_{n-1}^0|} = \frac{|\alpha_n|}{|N_{n-2}^0 N_n^0|} + \frac{1}{|N_{n-1}^0 N_n^0|}$$

ist. Denkt man sich hier n nacheinander durch m, $m+1$, $m+2$, $\ldots n$ ersetzt, wobei $m > 2\mu_1 + 2$ zu nehmen ist, und hierauf die so erhaltenen Gleichungen addiert, so gelangt man zu dem Resultate

$$\frac{1}{|N_{m-2}^0 N_{m-1}^0|} = \sum_m^n \frac{|\alpha_r|}{|N_{r-2}^0 N_r^0|} + \frac{1}{|N_{n-1}^0 N_n^0|},$$

woraus sich zufolge (20)

$$\sum_{m}^{\infty}{}_{r} \frac{|\alpha_r|}{|N^0_{r-2} N^0_r|} = \frac{1}{|N^0_{m-2} N^0_{m-1}|}$$

ergibt. Es ist also die hier links stehende unendliche Reihe konvergent und daher konvergiert zufolge (19) auch die Reihe A'.

Ebenso beweist man die Konvergenz der Reihe B'. Aus der Konvergenz von A' und B' folgt aber jene der Reihe H und aus dieser die absolute Konvergenz der beiden Reihen (3). Somit ist der Kettenbruch (5) unter den Voraussetzungen 1), 2) und 3a) konvergent.

Erfüllt derselbe die Bedingungen 1), 2) und 3b), so genügt jeder der Kettenbrüche

$$R_n \equiv \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_n^\infty \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

den Bedingungen 1), 2) und 3a), so daß der Kettenbruch (5) in diesem Falle unbedingt konvergiert. Ist schließlich noch die Anzahl der verschwindenden Teilnenner b_n eine begrenzte, so gibt es eine natürliche Zahl m derart, daß für $n \geqq m$ $|b_n| > 0$ ist, und es sind dann für diese Werte von n nicht nur alle Näherungsnenner N_n, sondern auch die sämtlichen Näherungsnenner aller Kettenbrüche R_n von Null verschieden. K ist also in diesem Falle ein eigentlicher Kettenbruch. Wenn dagegen b_n für unbegrenzt viele Werte $n = n_1, n_2, \ldots n_\nu, \ldots$ verschwindet, so ist

$$N_{n_\nu - 1, n_\nu} = b_{n_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und daher der Kettenbruch K ein uneigentlicher.

In dem soeben bewiesenen Satze ist als besonderer Fall der Satz 1 von Nr. 3 enthalten, insoweit als sich der letztere auf die Konvergenz bezieht.

10. Die periodischen Kettenbrüche.

Entsteht ein unendlicher Kettenbruch dadurch, daß von einem gewissen Gliede an eine aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern gebildete Folge, welche die Periode heißt, fortwährend wiederholt wird, so nennt man den Kettenbruch einen periodischen, und zwar einen rein periodischen, wenn die Periode beim ersten Gliede des Kettenbruches beginnt, dagegen einen gemischt periodischen, wenn der Periode Glieder vorangehen, wozu auch die additive Zahl b_0 zu rechnen ist.[1])

1) Jedoch wird, namentlich in zahlentheoretischen Werken, auch ein regelmäßiger periodischer Kettenbruch von der Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_0} + \frac{1}{b_1} + \cdots + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_0} + \cdots$$

als rein periodisch bezeichnet. Für das Folgende ist indessen an der oben gegebenen Definition festzuhalten.

Es genügt offenbar, sich mit den rein periodischen Kettenbrüchen zu befassen. Wir legen uns demnach den unendlichen Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_1}{b_1} + \cdots. \tag{1}$$

vor, worin die ersten m Glieder die Periode bilden. Die Teilzähler $a_1, a_2, \ldots a_m$ und die Teilnenner $b_1, b_2, \ldots b_m$ können beliebige, reelle oder komplexe Werte haben, nur soll von den ersteren keiner verschwinden. Daß es unter den periodischen Kettenbrüchen sowohl konvergente als auch divergente gibt, zeigen beispielsweise die beiden Kettenbrüche

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots, \quad \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \cdots,$$

von denen der erste konvergiert, der zweite divergiert.

Weiß man von dem Kettenbruche (1), daß er konvergiert, so läßt sich sein Grenzwert x stets aus einer quadratischen Gleichung berechnen. In diesem Falle hat nämlich jeder seiner Näherungsbrüche K_n mindestens von einem bestimmten Werte des n angefangen einen Sinn, und es ist daher für hinlänglich große Werte von n

$$K_{m+n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m + K_n},$$

woraus sich

$$K_{m+n} = \frac{Z_{m-1} K_n + Z_m}{N_{m-1} K_n + N_m} \tag{2}$$

ergibt. Da K_{m+n} einen Sinn hat, so kann der Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung niemals verschwinden; denn sonst müßte auch der Zähler gleichzeitig verschwinden, und das ist wegen $|Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1}| > 0$ nicht möglich. Nun ist aber nach unserer Voraussetzung

$$\lim_{n=+\infty} K_{m+n} = \lim_{n=+\infty} K_n = x,$$

so daß durch den Übergang zur Grenze $n = +\infty$ aus (2) die Gleichung

$$x = \frac{Z_{m-1} x + Z_m}{N_{m-1} x + N_m} \tag{3}$$

hervorgeht, worin der Nenner aus dem nämlichen Grunde ebenfalls nicht verschwinden kann. Wenn also der Kettenbruch (1) konvergiert, so genügt sein Grenzwert x stets der quadratischen Gleichung

$$N_{m-1} x^2 + (N_m - Z_{m-1}) x - Z_m = 0, \tag{4}$$

welche wir die dem periodischen Kettenbruche (1) zugehörige quadratische Gleichung nennen wollen.

Es entsteht nun die Frage, welche von den beiden, im allgemeinen voneinander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung der Grenzwert von (1) ist. Diese und die Frage nach der Konvergenz von (1) läßt sich in einigen Fällen leicht erledigen. So ist z. B. unmittelbar klar, daß, wenn die Elemente des Kettenbruches (1) sämlich reell sind, während die Gleichung (4) komplexe Wurzeln hat, der Kettenbruch divergieren muß. Daß dieser Fall eintreten kann, folgt aus X, 6, wonach sich die Elemente a_{m-1}, b_{m-1}, a_m und b_m immer so bestimmen lassen, daß Z_{m-1}, N_{m-1}, N_m und Z_m vier vorgeschriebene Werte annehmen.

Sind die Teilzähler und Teilnenner von (1) sämtlich reell und positiv, so ist der Kettenbruch stets konvergent, indem die unendliche Reihe (10) in Nr. 3 als eine periodische gewiß divergiert. Sein Grenzwert ist die einzige positive Wurzel der Gleichung (4).

Auch im Falle, daß die Teilzähler sämtlich negativ, die Teilnenner sämtlich positiv sind und $b_n + a_n \geqq 1$ ist, wird man mit dem bisher Vorgetragenen ausreichen.[1]) In anderen Fällen aber bedarf, wenn auch der Kettenbruch (1) die Bedingungen des einen oder anderen der vorausgegangenen Konvergenzsätze erfüllen sollte, immerhin noch die Feststellung seines Grenzwertes einer eigenen Untersuchung.

Ob ein beliebig vorgelegter, rein periodischer Kettenbruch (1) konvergiere und, falls er konvergiert, welche Wurzel der Gleichung (4) sein Grenzwert sei, läßt sich, wie O. Stolz zuerst und zwar im wesentlichen in der hier folgenden Weise gezeigt hat, stets durch eine allgemeine Regel entscheiden.[2])

Setzt man in den Formeln (IV) in X, 4

$$p = hm + r, \quad k = hm + 1,$$

so kann man dieselben auf Grund der Periodizität des Kettenbruches (1) unter Berücksichtigung der Formeln (6) und (7) in X, 1 leicht auf die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} Z_{hm+r} &= Z_r Z_{hm-1} + N_r Z_{hm} \\ N_{hm+r} &= Z_r N_{hm-1} + N_r N_{hm} \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \cdots m) \tag{5}$$

bringen, worin $h \geqq 1$ zu nehmen ist. Diese Formeln gelten aber auch noch für $r = 0$, da sie hierfür zu Identitäten werden. Aus denselben ergibt sich unmittelbar, daß der Kettenbruch (1) divergiert, wenn $N_{m-1} = 0$ ist. Denn die zweite Gleichung (5) lautet in diesem

1) Vgl. die Beispiele 6) und 7) in Nr. 12.

2) O. Stolz, Vorl. über allgem. Arithmetik II, S. 300—304. — Eine andere Herleitung dieser Regel gibt Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 30 (1900), S. 463—482.

Falle, indem man darin $r = m - 1$ setzt,

$$N_{(h+1)m-1} = Z_{m-1} N_{hm-1},$$

und hieraus erhält man, indem man h der Reihe nach alle natürlichen Zahlen durchlaufen läßt, nacheinander

$$N_{2m-1} = 0, \quad N_{3m-1} = 0, \cdots, \quad \text{allgemein} \quad N_{hm-1} = 0.$$

Der Kettenbruch (1) enthält somit unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche K_{hm-1}, so daß er unbestimmt divergiert. Da $N_0 = 1$ ist, so kann dieser Fall bei einem eingliedrig periodischen Kettenbruche nicht eintreten.

Indem wir jetzt den Fall $|N_{m-1}| > 0$ betrachten wollen, setzen wir

$$S = N_m + Z_{m-1}, \; P = Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1} = (-1)^{m-1} a_1 a_2 \cdots a_m. \quad (6)$$

Es ist dann

$$D = (Z_{m-1} - N_m)^2 + 4 Z_m N_{m-1} =$$
$$= (N_m + Z_{m-1})^2 + 4 (Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1}) = S^2 + 4P \quad (7)$$

die Diskriminante der quadratischen Gleichung (4), deren Wurzeln x durch den Ausdruck

$$x = \frac{Z_{m-1} - N_m \pm W}{2 N_{m-1}} \quad (8)$$

gegeben sind, worin W eine bestimmte von den beiden Quadratwurzeln aus D bedeutet. Man kann für W den Hauptwert $\sqrt{D}$ wählen, doch ist es manchmal bequemer, die andere Quadratwurzel von D zu nehmen. Nun müssen wir noch zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Gleichung (4) zwei verschiedene oder zwei zusammenfallende Wurzeln besitzt, oder was auf dasselbe hinauskommt, je nachdem D von Null verschieden ist oder nicht. Wir fassen zunächst den letzteren Fall ins Auge.

1. Fall. Es sei $D = 0$. Verstehen wir jetzt unter x die Doppelwurzel der Gleichung (4), so ist zufolge (8)

$$Z_{m-1} - N_m = 2 x N_{m-1}, \quad (9)$$

also, wenn man

$$N_m + x N_{m-1} = y \quad (10)$$

setzt,

$$Z_{m-1} = y + x N_{m-1}. \quad (11)$$

Dazu gewinnt man aus (7) (1. Zeile) und (9) wegen $D = 0$ noch die Beziehung

$$Z_m = - x^2 N_{m-1}. \quad (12)$$

Läßt man nun in den Formeln (5) zuerst $r = m - 1$ und hierauf $r = m$ sein, während h jedesmal die Werte 1, 2, 3, ... durchläuft, so erhält man daraus mit Hilfe von (10), (11) und (12) auf leicht ersichtliche Weise die Relationen

$$\left.\begin{aligned} Z_{hm-1} &= y^{h-1}(y + hxN_{m-1}) \\ N_{hm-1} &= hy^{h-1}N_{m-1} \\ Z_{hm} &= -hy^{h-1}x^2N_{m-1} \\ N_{hm} &= y^{h-1}(y - hxN_{m-1}) \end{aligned}\right\} \quad (h \geqq 1), \tag{13}$$

deren Allgemeingültigkeit, da sie für $h = 1$ offenbar richtig sind, sich durch den Schluß von h auf $h + 1$ dartun läßt. Substituiert man diese Werte in die Gleichungen (5), so gewinnen die letzteren die Gestalt

$$Z_{hm+r} = y^{h-1}[(Z_r - xN_r)hxN_{m-1} + yZ_r]$$
$$N_{hm+r} = y^{h-1}[(Z_r - xN_r)hN_{m-1} + yN_r].$$

Es ist nun das Verhalten von N_{hm+r} näher zu untersuchen. Zufolge (9) und (10) hat man

$$y = \tfrac{1}{2}(N_m + Z_{m-1}) = \tfrac{1}{2}S$$

und nach (7) ist wegen $D = 0$

$$S^2 = -4P.$$

Folglich ist S und daher auch y von Null verschieden. Demnach könnte N_{hm+r} für unzählige Werte von h nur in der Weise verschwinden, daß $Z_r - xN_r = 0$ und gleichzeitig $N_r = 0$ wäre. Das ist jedoch unmöglich, da Z_r und N_r nie zugleich Null sind. Aus der Formel

$$K_{hm+r} = \frac{Z_{hm+r}}{N_{hm+r}} = \frac{(Z_r - xN_r)hxN_{m-1} + yZ_r}{(Z_r - xN_r)hN_{m-1} + yN_r}$$

ergibt sich daher

$$\lim_{h=+\infty} K_{hm+r} = x$$

und zwar für jeden Wert von r, auch wenn $Z_r - xN_r = 0$ sein sollte. Der Kettenbruch (1) ist also im vorliegenden Falle stets konvergent und hat die Doppelwurzel der Gleichung (4) zum Grenzwerte.

2. Fall. Es sei D von Null verschieden. Die Gleichung (4) hat nunmehr zwei voneinander verschiedene Wurzeln x_1 und x_2, welchen nach (8) die Werte

$$x_1 = \frac{Z_{m-1} - N_m + \varepsilon W}{2N_{m-1}}, \quad x_2 = \frac{Z_{m-1} - N_m - \varepsilon W}{2N_{m-1}} \quad (\varepsilon = \pm 1) \tag{14}$$

zukommen. Um über das Verhalten der Näherungsbrüche K_{hm+r}

Aufschluß zu erlangen, brauchen wir wieder independente Formeln für die Größen Z_{hm-1}, N_{hm-1}, Z_{hm} und N_{hm}. Um solche zu erreichen, führen wir anstatt N_{m-1} und N_m die Zahlen

$$y_1 = N_m + x_1 N_{m-1}, \quad y_2 = N_m + x_2 N_{m-1} \tag{15}$$

ein. Es ist dann zufolge (14) und (6)

$$y_1 = \frac{S + \varepsilon W}{2} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{S - \varepsilon W}{2} \tag{16}$$

und somit nach (7)

$$y_1 y_2 = \frac{S^2 - W^2}{4} = \frac{S^2 - D}{4} = -P,$$

woraus zu ersehen ist, daß weder y_1 noch y_2 verschwinden kann. Aus (15) ergibt sich

$$(x_1 - x_2) N_{m-1} = y_1 - y_2, \quad (x_1 - x_2) N_m = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{17}$$

und mit Hilfe der Relationen

$$Z_{m-1} - N_m = (x_1 + x_2) N_{m-1} \quad \text{und} \quad Z_m = -x_1 x_2 N_{m-1},$$

die aus der Gleichung (4), deren Wurzeln x_1 und x_2 sind, hervorgehen, findet man noch

$$(x_1 - x_2) Z_{m-1} = x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad (x_1 - x_2) Z_m = x_1 x_2 (y_2 - y_1). \tag{18}$$

Auf Grund der Gleichungen (17) und (18) gewinnt man aus (5) in derselben Weise, in der wir oben zu den Ausdrücken (13) gelangt sind, die Formeln

$$\left.\begin{aligned} (x_1 - x_2) Z_{hm-1} &= x_1 y_1^h - x_2 y_2^h \\ (x_1 - x_2) N_{hm-1} &= y_1^h - y_2^h \\ (x_1 - x_2) Z_{hm} &= x_1 x_2 (y_2^h - y_1^h) \\ (x_1 - x_2) N_{hm} &= x_1 y_2^h - x_2 y_1^h \end{aligned}\right\} \quad (h \geqq 1), \tag{19}$$

welche für $h = 1$ mit (17) und (18) übereinstimmen und für die übrigen Werte von h durch den Schluß von h auf $h + 1$ sich bestätigen lassen.[1])

Soll nun der Kettenbruch (1) konvergieren, so darf vor allem von einem bestimmten Werte des n an keiner der Näherungsnenner N_n verschwinden. Um zu erfahren, wann dies stattfindet, berechnen wir N_{hm+r} aus der zweiten Formel (5) mit Hilfe der in (19) aufgestellten Werte für N_{hm} und N_{hm-1}. Diese Rechnung ergibt

1) Die Formeln (19) sind für den Fall $m = 1$ und $a_1 = 1$ von Clausen [Journal f. Math., Bd. 3 (1828), S. 87] aufgestellt worden; S. Günther hat sie für jeden eingliedrig periodischen Kettenbruch gegeben (vgl. Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen S. 51).

$$(x_1 - x_2) N_{hm+r} = (Z_r - x_2 N_r) y_1^h - (Z_r - x_1 N_r) y_2^h$$
$$(r = 0, 1, 2, \cdots m-1; \quad h = 0, 1, 2, \cdots);$$

für $h = 0$ wird die Gleichung nämlich zur Identität. Ist nun für irgend einen Wert von r $Z_r - x_1 N_r = 0$, so ist, da nicht gleichzeitig $Z_r - x_2 N_r = 0$ sein kann, N_{hm+r} sicher von Null verschieden. Demnach kann N_{hm+r} nur verschwinden, wenn

$$|Z_r - x_1 N_r| > 0 \quad \text{und} \quad (y_2 : y_1)^h = (Z_r - x_2 N_r) : (Z_r - x_1 N_r)$$

ist. Soll N_n für unendlich viele Werte von n verschwinden, so muß es mindestens einen Wert r_0 von r geben, für welchen $|Z_{r_0} - x_1 N_{r_0}| > 0$ ist und welchem unendlich viele Werte $h_1 < h_2 < \cdots < h_\nu < \cdots$ von h in der Weise entsprechen, daß die Gleichungen

$$(y_2 : y_1)^{h_\nu} = (Z_{r_0} - x_2 N_{r_0}) : (Z_{r_0} - x_1 N_{r_0}) \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

bestehen. Da dann $(y_2 : y_1)^{h_2 - h_1} = 1$ ist, so erkennt man, daß $y_2 : y_1$ in diesem Falle eine $(h_2 - h_1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel sein muß, wobei, nebenbei bemerkt, nicht $h_2 - h_1 = 1$ sein kann, da ja y_2 von y_1 verschieden ist. Hiervon gilt auch die Umkehrung, d. h. wenn $y_2 : y_1$ eine Einheitswurzel ist, deren Exponent p sein möge, so verschwindet N_n für unendlich viele Werte von n. Da jetzt $y_2^p = y_1^p$ ist, so hat man nach der zweiten Gleichung (19)

$$(x_1 - x_2) N_{pnm-1} = 0, \quad \text{d. i.} \quad N_{pnm-1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Somit divergiert der Kettenbruch (1) in diesem Falle und zwar unbestimmt.

Um den allgemeineren Fall, in welchem $y_2 : y_1$ keine Einheitswurzel ist, zu erledigen, bilden wir jetzt mit Hilfe von (5) und (19) die Gleichung

$$K_{hm+r} = \frac{Z_{hm+r}}{N_{hm+r}} = \frac{(Z_r - x_2 N_r) x_1 y_1^h - (Z_r - x_1 N_r) x_2 y_2^h}{(Z_r - x_2 N_r) y_1^h - (Z_r - x_1 N_r) y_2^h}. \tag{20}$$

Diese Gleichung umfaßt alle Näherungsbrüche. Denn da die Formeln (5) und (19) für $h \geqq 1$ und $r = 0, 1, 2, \cdots m-1$ gelten, kommt nur noch der Wert $h = 0$ in Frage; für $h = 0$ wird aber die vorstehende Gleichung zur Identität. Der Nenner auf der rechten Seite von (20) kann jetzt höchstens für eine endliche Anzahl von Werten $n = hm + r$ verschwinden. Er verschwindet also sicher von einem bestimmten Werte des h an nicht mehr. Dagegen ist der Fall nicht ausgeschlossen, daß auch jetzt noch $|y_2 : y_1| = 1$ ist, da ja diese Gleichheit stattfinden kann, ohne daß deswegen $y_2 : y_1$ eine Einheitswurzel zu sein braucht.

Wir nehmen also an, es sei $|y_2 : y_1| = 1$, jedoch $y_2 : y_1$ keine Einheitswurzel. Existiert dann mindestens ein Wert r_1 von r derart,

daß weder $Z_{r_1} - x_1 N_{r_1}$ noch $Z_{r_1} - x_2 N_{r_1}$ verschwindet, und schreiben wir zur Abkürzung

$$y_2 : y_1 = \eta \quad \text{und} \quad (Z_{r_1} - x_1 N_{r_1}) : (Z_{r_1} - x_2 N_{r_1}) = A,$$

so ist dann $|A| > 0$ und zufolge (20)

$$K_{hm+r_1} = \frac{x_1 - x_2 A\eta^h}{1 - A\eta^h}$$

und hieraus findet man

$$K_{(h+1)m+r_1} - K_{hm+r_1} = \frac{A\eta^h(\eta - 1)(x_1 - x_2)}{(1 - A\eta^{h+1})(1 - A\eta^h)},$$

also

$$|K_{(h+1)m+r_1} - K_{hm+r_1}| > \frac{|A(\eta - 1)(x_1 - x_2)|}{(1 + |A|)^2}.$$

Demnach besitzt K_{hm+r_1} bei $\lim h = +\infty$ jedenfalls keinen endlichen Grenzwert. Dieser Fall trifft bei unserer Annahme $|y_2 : y_1| = 1$ stets zu, wenn $m = 1$ ist. Denn für $m = 1$ lautet die Gleichung (4)

$$x^2 + b_1 x - a_1 = 0,$$

so daß weder x_1 noch x_2 verschwinden, und daher wegen $Z_0 = 0$ und $N_0 = 1$ auch weder $Z_0 - x_1 N_0 = 0$ noch $Z_0 - x_2 N_0 = 0$ sein kann. Ist dagegen $m > 1$, so kann möglicherweise für jeden Wert $r = 0, 1, 2, \ldots m - 1$ einer der beiden Ausdrücke $Z_r - x_1 N_r$ und $Z_r - x_2 N_r$ verschwinden, jedoch keiner für zwei unmittelbar aufeinander folgende Werte von r und auch niemals beide zugleich, sondern nur in der Weise, daß die beiden Ausdrücke, während r die Werte $0, 1, 2, \ldots m - 1$ durchläuft, abwechselnd Null sind. Folglich gibt es dann Werte von r, wofür $Z_r - x_1 N_r = 0$, und solche, wofür $Z_r - x_2 N_r = 0$ ist, und man hat in diesem Falle nach (20) $K_{hm+r} = x_1$ oder $K_{hm+r} = x_2$, je nachdem r einen Wert der ersteren oder einen solchen der letzteren Art vorstellt, so daß der Kettenbruch (1) zwischen den Grenzen x_1 und x_2 oszilliert.

Endlich bleibt uns zur Untersuchung noch der Fall übrig, daß $|y_2 : y_1|$ von 1 verschieden ist. In diesem Falle kann man das Zeichen ε in (14) und (16) stets so wählen, daß $|y_2 : y_1| < 1$ wird. Dann hat $(y_2 : y_1)^h$ bei $\lim h = +\infty$ den Grenzwert Null und die Gleichung (20) ergibt

$$\lim_{h=+\infty} K_{hm+r} = x_1$$

für jeden Wert von r, wofür $Z_r - x_2 N_r$ nicht verschwindet; ist aber für irgend einen Wert s von r $Z_s - x_2 N_s = 0$, so hat man nach (20)

$$K_{hm+s} = x_2.^1)$$

1) Daß die Näherungsbrüche K_{hm+r} eines periodischen Kettenbruches für alle Werte von r mit Ausnahme eines einzigen $r = s$ bei $\lim h = +\infty$ die eine

Der Kettenbruch (1) konvergiert also im vorliegenden Falle zum Grenzwerte x_1 oder oszilliert zwischen den Grenzen x_1 und x_2, je nachdem $Z_r - x_2 N_r$ für die sämtlichen Werte $r = 0, 1, 2, \ldots m-1$ von Null verschieden ausfällt oder nicht.

Hierzu kann man zunächst noch bemerken, daß $Z_{m-1} - x_2 N_{m-1}$ niemals verschwinden kann, da nach (14) und (16) mit Rücksicht auf die erste Formel (6)

$$Z_{m-1} - x_2 N_{m-1} = \frac{S + \varepsilon W}{2} = y_1$$

ist. Ferner kann $Z_0 - x_2 N_0$ zufolge (4) nur dann verschwinden, wenn $Z_m = 0$ ist; denn es ist $Z_0 = 0$ und $N_0 = 1$, also $Z_0 - x_2 N_0 = x_2$.

Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung läßt sich zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz. 1) Der rein periodische Kettenbruch (1) divergiert, wenn $N_{m-1} = 0$ ist.

2) Ist $|N_{m-1}| > 0$, aber $D = 0$, hat also die Gleichung (4) zwei zusammenfallende Wurzeln, so konvergiert der Kettenbruch (1) und sein Grenzwert ist die Doppelwurzel der Gleichung (4).

3) Ist $|N_{m-1}| > 0$ und $|D| > 0$, so daß die Gleichung (4) zwei voneinander verschiedene Wurzeln

$$x_1 = \frac{Z_{m-1} - N_m + \varepsilon W}{2 N_{m-1}}, \quad x_2 = \frac{Z_{m-1} - N_m - \varepsilon W}{2 N_{m-1}} \quad (\varepsilon = \pm 1,\ W^2 = D)$$

besitzt, so ist zur Konvergenz des Kettenbruches (1) notwendig, daß

$$|S - W| \gtrless |S + W| \qquad (\alpha)$$

sei. Diese Bedingung ist zur Konvergenz auch hinreichend, falls $m = 1$, oder falls $m = 2$ und zugleich $|Z_2| > 0$ ist. In allen übrigen Fällen jedoch ist der Kettenbruch dann und nur dann konvergent, wenn neben (α) noch die Bedingungen

$$|Z_r - x_2 N_r| > 0 \quad (r = 0, 1, 2, \cdots m-2) \qquad (\beta)$$

erfüllt sind, wobei zur Bestimmung der Wurzel x_2 die Einheit ε so zu wählen ist, daß

$$|S - \varepsilon W| < |S + \varepsilon W|$$

wird. Der Grenzwert des Kettenbruches ist nach dieser Festsetzung von ε im Falle der Konvergenz stets x_1.

Wenn neben $|N_{m-1}| > 0$ und $|D| > 0$ noch $Z_m = 0$ ist, so kann man, wie Pringsheim (a. zuletzt a. O. S. 481) bemerkt hat, die Be-

---

Wurzel x_1 der zugehörigen quadratischen Gleichung zum Grenzwerte haben können, während K_{hm+s} durchaus ihrer anderen Wurzel x_2 gleich ist, hat Thiele hervorgehoben (vgl. Fortschr. d. Math. XI, S. 150).

dingung (α) durch die Relation

$$|Z_{m-1} : N_m| < 1 \qquad (\gamma)$$

ersetzen, welche dann, falls $m \leqq 2$ ist, zur Konvergenz des Kettenbruches (1) allein hinreicht, während im Falle $m > 2$ noch die Bedingungen (β) für $r = 1, 2, \ldots m-2$ hinzutreten müssen. Für $Z_m = 0$ hat man nämlich nach (7) $D = (Z_{m-1} - N_m)^2$, so daß man $W = Z_{m-1} - N_m$ setzen darf, wodurch die Relation (α) im Hinblicke auf die erste Gleichung (6) in $|N_m| \gtrless |Z_{m-1}|$ übergeht. Ist nun $|N_m| < |Z_{m-1}|$, so hat man $\varepsilon = 1$ zu nehmen, wodurch sich $x_2 = 0$, also auch $Z_0 - x_2 N_0 = 0$ ergibt, so daß der Kettenbruch divergiert. Ist dagegen $|N_m| > |Z_{m-1}|$, was der Bedingung (γ) entspricht, so hat man

$$\varepsilon = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = (Z_{m-1} - N_m) : N_{m-1},$$

also, da wegen $|D| > 0$ auch $|Z_{m-1} - N_m| > 0$ sein muß, $|x_2| > 0$ und die Konvergenz des Kettenbruches erfordert jetzt noch das Bestehen der Relationen (β) für $r = 1, 2, \ldots m-2$. — Schließt man den soeben betrachteten Fall nunmehr aus, so kann man auch für die übrigen Fälle in den Relationen (β) den Wert $r = 0$ weglassen.

11. Divergenzkriterien für periodische Kettenbrüche.

Die Rechnung, welche der vorstehende Satz bezüglich eines vorgelegten, rein periodischen Kettenbruches (1) erfordert, kann in einigen Fällen dadurch erspart oder doch abgekürzt werden, daß man auf den Kettenbruch zuerst die folgenden von Stolz aufgestellten Divergenzkriterien[1]) anwendet und erst, wenn der Kettenbruch keinem von ihnen entspricht, auf den vorigen Satz zurückgreift:

Hat die zu dem rein periodischen Kettenbruche

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_1}{b_1} + \cdots$$

gehörige quadratische Gleichung zwei voneinander verschiedene (endliche) Wurzeln, d. h. ist $|N_{m-1}| > 0$ und $|D| > 0$, so divergiert der Kettenbruch

1) wenn $S = 0$ ist;

2) wenn bei reellen Werten von S und P die Wurzeln der genannten Gleichung nicht reell sind;

3) wenn bei nicht-reellem Werte von S

$$P = \varrho S^2$$

ist, worin ϱ eine reelle Zahl kleiner als $-\frac{1}{4}$ bedeutet.

Beweis. Im Falle $S = 0$ ist offenbar

$$|S - W| = |S + W|, \qquad (21)$$

1) Stolz, Ber. d. naturw.-med. Vereins Innsbruck, Bd. XVII (1888), S. XVIII.

so daß die zur Konvergenz notwendige Bedingung (α) des vorigen Satzes nicht erfüllt ist.

Sind S und P reell, während die Wurzeln der Gleichung (4) nicht reell sind, so muß gemäß der Gleichung (7) D reell und negativ sein. Man darf daher in diesem Falle $W = i\sqrt{|D|}$ setzen, woraus zu ersehen ist, daß die beiden Zahlen $S + W$ und $S - W$ komplex-konjugiert sind, so daß wieder die Gleichung (21) besteht.

Ist endlich $P = \varrho S^2$, so hat man nach (7)

$$D = S^2 + 4P = S^2(1 + 4\varrho).$$

Wenn daher ϱ reell und kleiner als $-\frac{1}{4}$ ist, so ist $1 + 4\varrho < 0$. Bezeichnet man mit δ die absolute Quadratwurzel aus $-(1 + 4\varrho)$, so kann man demnach $W = S\delta i$ setzen und hat dann

$$S - W = S(1 - \delta i) \quad \text{und} \quad S + W = S(1 + \delta i).$$

Somit besteht auch in diesem Falle die Gleichung (21), womit die Divergenz des Kettenbruches nachgewiesen ist.

12. Beispiele von rein periodischen Kettenbrüchen aus reellen Elementen.

1) Dem eingliedrig periodischen Kettenbruche

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots, \tag{22}$$

worin a und b von Null verschieden sein sollen, entspricht die quadratische Gleichung

$$x^2 + bx = a. \tag{23}$$

Unter Beibehaltung der in Nr. 10 gebrauchten Bezeichnungen hat man daher

$$S = b, \quad D = b^2 + 4a.$$

Ist nun $D < 0$, so hat die Gleichung (23) komplexe Wurzeln und der Kettenbruch divergiert. Für $D = 0$ besitzt die Gleichung (23) zwei zusammenfallende Wurzeln, deren gemeinsamer Wert $x = -b : 2$ auch der Wert des nun konvergenten Kettenbruches (22) ist.

Wenn endlich $D > 0$ ist, so hat man

$$\text{neben } b \gtrless 0 \text{ entsprechend } |S - \sqrt{D}| \lesseqgtr |S + \sqrt{D}|;$$

der Kettenbruch konvergiert also und sein Wert ist nach dem Satze in Nr. 10

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2};$$

je nachdem b positiv oder negativ ist. Der Wert des Kettenbruches

ist somit in diesem Falle stets der absolut kleineren Wurzel der Gleichung (23) gleich.[1])

2) Unter den eingliedrig periodischen Kettenbrüchen verdient noch besondere Berücksichtigung der einfachste aller unendlichen Kettenbrüche

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \cdots \tag{24}$$

Für denselben ist $Z_0 = 0$, $N_0 = Z_1 = 1$ und allgemein $N_n = Z_{n+1}$ $(n \geqq 0)$. Die zugehörige quadratische Gleichung lautet

$$x^2 + x = 1. \tag{25}$$

Der Grenzwert des Kettenbruches (24) ist die positive Wurzel desselben, d. i.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Für die Näherungszähler Z_n besteht die Rekursionsformel

$$Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2}.$$

Man hat daher neben $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$

$$Z_2 = 1, \quad Z_3 = 2, \quad Z_4 = 3, \quad Z_5 = 5, \quad Z_6 = 8, \quad Z_7 = 13, \cdots$$

Diese Zahlen heißen die Schimperschen oder Laméschen Zahlen. Z_n gibt die Anzahl der Glieder des Zählers des n^{ten} sowie des Nenners des $(n-1)^{\text{ten}}$ Näherungsbruches eines beliebigen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ dessen Anfangsglied Null ist, an. Denn setzt man durchweg $a_\nu = b_\nu = 1$, so wird ein jedes Glied in den für die Näherungszähler und Näherungsnennern sich ergebenden Aggregaten gleich 1.

Aus dem Kettenbruche (24) läßt sich leicht noch eine independente Formel zur Berechnung der Laméschen Zahl Z_n herleiten. Zu diesem Zwecke brauchen wir noch die zweite Wurzel

$$x_2 = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

der Gleichung (25) und die Ausdrücke

$$y_1 = N_1 + N_0 x_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \text{und} \quad y_2 = N_1 + N_0 x_2 = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}).$$

Auf Grund derselben findet man aus der dritten Gleichung (19), indem man dort $m = 1$ und $h = n$ setzt,

$$Z_n = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} : \sqrt{5}.$$

3) Für den zweigliedrig periodischen Kettenbruch

$$\frac{a}{0} + \frac{b}{c} + \frac{a}{0} + \frac{b}{c} + \cdots$$

1) A. F. Möbius, Journal f. Math., Bd. 6 (1830), S 234.

geht die Gleichung (4) in Nr. 10 in die lineare

$$(b-a)x - ac = 0$$

über; der Kettenbruch ist also nach dem Satze in Nr. 10 divergent (vgl. auch S. 507). Ist $a = b$, so verschwindet in der vorstehenden Gleichung auch noch das Glied mit x, und wenn außerdem noch $c = 0$ ist, so sind die sämtlichen Koeffizienten der Gleichung (4) Null.

4) Jeder zweigliedrig periodische Kettenbruch, dessen erster Teilnenner von Null verschieden ist, läßt sich auf die Form

$$\frac{a}{1} + \frac{c}{b} + \frac{a}{1} + \frac{c}{b} + \cdots \tag{26}$$

bringen, wofür man

$$Z_1 = a, \quad N_1 = 1, \quad Z_2 = ab, \quad N_2 = b + c$$

findet, so daß die zugehörige Gleichung die Gestalt

$$x^2 + (b + c - a)x = ab \tag{27}$$

annimmt. Die durch die erste Gleichung (6) in Nr. 10 definierte Größe S hat den Wert

$$S = a + b + c.$$

Lassen wir nun zunächst $S = 0$, also $c = -(a+b)$ sein, so geht der Kettenbruch (26) in

$$\frac{a}{1} - \frac{a+b}{b} + \frac{a}{1} - \frac{a+b}{b} + \cdots \tag{28}$$

und die Gleichung (27) in

$$x^2 - 2ax = ab$$

über. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$a + \sqrt{a^2 + ab} \quad \text{und} \quad a - \sqrt{a^2 + ab},$$

sie sind also voneinander verschieden; denn da wir die Teilzähler stets als von Null verschieden voraussetzen, so kann

$$a^2 + ab = a\,(a + b)$$

nicht Null sein. Diese Wurzeln sind ferner reell, solange $a^2 + ab > 0$ ist, während der Kettenbruch (28) nach dem ersten Divergenzkriterium der vorigen Nummer jedenfalls divergiert.

Nunmehr setzen wir voraus, daß $S \gtrless 0$ sei. Ist dann b, also auch Z_2 von Null verschieden, so konvergiert der Kettenbruch (26) nach dem Satze in Nr. 10, sofern nur die Gleichung (27) reelle Wurzeln besitzt. Ist dagegen $b = 0$, so lautet der Kettenbruch (26)

$$\frac{a}{1} + \frac{c}{0} + \frac{a}{1} + \frac{c}{0} + \cdots, \tag{29}$$

worin jetzt, weil $S = a + c \gtrless 0$ sein soll, c von $-a$ verschieden sein muß. Diesem Kettenbruche entspricht nach (27) die Gleichung

$$x^2 + (c-a)x = 0.$$

Dieselbe hat, falls $c = a$ ist, die Doppelwurzel $x = 0$, so daß der Kettenbruch (29) in diesem Falle nach dem Satze in Nr. 10 zur Null konvergiert. Ist aber c von a verschieden, so muß jetzt $|c| \gtrless |a|$ sein, und es kommt nun darauf an, welches von den beiden Ungleichheitszeichen hier Geltung habe. In beiden Fällen dürfen wir jedoch $W = c - a$ setzen, worauf

$$S - W = 2a \quad \text{und} \quad S + W = 2c$$

wird. Es sei nun zunächst $|a| < |c|$; dann ist

$$|S - W| < |S + W|,$$

also dem Satze in Nr. 10 entsprechend $x_1 = 0$, $x_2 = a - c$ und daher

$$|Z_0 - x_2 N_0| = |a - c| > 0,$$

demzufolge der Kettenbruch (29) wieder zur Null konvergiert. Wenn endlich $|a| > |c|$ ist, so hat man

$$|S + W| < |S - W|$$

und es ist dann $x_1 = a - c$ und $x_2 = 0$ zu setzen, woraus sich $Z_0 - x_2 N_0 = 0$ ergibt. Nach dem erwähnten Satze ist der Kettenbruch (29) in diesem Falle divergent und zwar schwankt er zwischen den Grenzen 0 und $a - c$; es ist nämlich

$$K_{2n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim K_{2n+1} = a - c,$$

was in Nr. 10 gezeigt wurde, und auch leicht direkt zu finden ist.

5) Ähnlich wie der Kettenbruch (29) im zuletzt angegebenen Falle verhält sich auch der rein periodische Kettenbruch mit der Periode

$$-\frac{1}{1} \dot{-} \frac{2}{5} \dot{-} \frac{2}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{4},$$

zu welchem die quadratische Gleichung $5x^2 + 27x + 36 = 0$ mit den Wurzeln $-\frac{12}{5}$ und -3 gehört. Hierbei ist $S = N_6 + Z_5 = 5$ und $D = 9$, also, wenn man $W = \sqrt{D} = 3$ nimmt, $S - W = 2$ und $S + W = 8$, so daß nach Nr. 10 $x_1 = -\frac{12}{5}$ und $x_2 = -3$ zu setzen ist. Da

$$Z_3 - x_2 N_3 = 0$$

ist, so divergiert der in Rede stehende Kettenbruch und zwar hat man

$$K_{6\lambda+3} = -3 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda=+\infty} K_{6\lambda+r} = -\frac{12}{5} \quad (r = 0, 1, 2, 4, 5).$$

6) Sind die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ sämtlich positiv, so ist der rein periodische Kettenbruch

$$K \equiv \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_m}{b_m} \dot{+} \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \cdots$$

nach Nr. 3 konvergent, weil, wie schon erwähnt wurde, die Reihe (10) in Nr. 3 als eine periodische sicher divergiert. Sein Grenzwert K liegt zwischen K_1 und K_2, ist also positiv. Die zugehörige quadratische Gleichung hat die Wurzeln

$$x = \frac{Z_{m-1} - N_m \pm \sqrt{D}}{2N_{m-1}},$$

worin

$$D = (Z_{m-1} - N_m)^2 + 4Z_m N_{m-1} > (Z_{m-1} - N_m)^2,$$

also

$$\sqrt{D} > |Z_{m-1} - N_m|$$

ist. Von den beiden Wurzeln x ist daher die eine positiv, die andere negativ, so daß die positive mit dem Grenzwerte K übereinstimmen muß.

7) Genügen die positiven Zahlen $a_1, a_2, \cdots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ den Bedingungen

$$b_r \geqq a_r + 1 \quad (r = 1, 2, 3, \cdots m),$$

so ist der rein periodische Kettenbruch

$$K \equiv -\frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_m}{b_m} \dot{-} \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \cdots \tag{30}$$

nach Nr. 5 konvergent und sein Grenzwert K liegt zwischen -1 und 0; nur wenn durchwegs $b_r = a_r + 1$ ist, kann $K = -1$ sein. Bezeichnen wir die Näherungszähler dieses Kettenbruches mit $-Z_r$ anstatt Z_r, so hat die zugehörige quadratische Gleichung die Gestalt

$$N_{m-1}x^2 + (N_m + Z_{m-1})x + Z_m = 0. \tag{31}$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned} D &= (N_m + Z_{m-1})^2 - 4Z_m N_{m-1} = (N_m - Z_{m-1})^2 - 4(Z_m N_{m-1} - N_m Z_{m-1}) \\ &= (N_m - Z_{m-1})^2 - 4a_1 a_2 \cdots a_m \end{aligned} \tag{32}$$

und da, wie auf S. 524 gezeigt wurde,

$$N_{m-1} - Z_{m-1} \geqq 1 \quad \text{und} \quad N_m - N_{m-1} \geqq a_1 a_2 \cdots a_m, \tag{33}$$

also

$$(N_m - N_{m-1})(N_{m-1} - Z_{m-1}) \geqq a_1 a_2 \cdots a_m$$

ist, so hat man

$$D \geqq (N_m - Z_{m-1})^2 - 4(N_{m-1} - Z_{m-1})(N_m - N_{m-1}),$$

d. i.

$$D \geqq (N_m + Z_{m-1} - 2N_{m-1})^2.$$

Die Wurzeln der Gleichung (31) sind

$$x = \frac{-(N_m + Z_{m-1}) \pm \sqrt{D}}{2N_{m-1}}.$$

Ist $D = 0$, so hat demnach die Gleichung (31) die Doppelwurzel $x = -1$, welche zugleich den Wert des Kettenbruches angibt. Dieser Fall kann, wie wir wissen, nur dann eintreten, wenn durchwegs $b_r = a_r + 1$ ist.

Ist $D > 0$, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (31) voneinander verschieden und es liegt mindestens die eine davon, da sie dem Grenzwerte K des Kettenbruches gleich sein muß, im Intervalle $(-1, 0)$. Ferner sind beide Wurzeln negativ, da nach (32) $\sqrt{D} < N_m + Z_{m-1}$ ist. Setzen wir

$$x_1 = \frac{-(N_m + Z_{m-1}) + \sqrt{D}}{2N_{m-1}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-(N_m + Z_{m-1}) - \sqrt{D}}{2N_{m-1}},$$

ohne uns darum zu kümmern, ob diese Bezeichnungen mit den Festsetzungen von Nr. 10 übereinstimmen oder nicht, so ist, weil N_m, N_{m-1} und Z_{m-1} positiv sind, $|x_1| < |x_2|$. Die Frage nach dem Grenzwerte des Kettenbruches ist demnach entschieden, falls $|x_2| > 1$ ist; denn dann muß $K = x_1$ sein. Falls nun $N_m + Z_{m-1} > 2N_{m-1}$ ist, ergibt sich sofort

$$|x_2| = \frac{N_m + Z_{m-1} + \sqrt{D}}{2N_{m-1}} > \frac{N_m + Z_{m-1}}{2N_{m-1}} > 1.$$

Wenn dagegen $N_m + Z_{m-1} < 2N_{m-1}$ ist, so hat man

$$|x_2| \geqq \frac{N_m + Z_{m-1} + (2N_{m-1} - N_m - Z_{m-1})}{2N_{m-1}} = 1,$$

und zwar ist dann und nur dann $|x_2| = 1$, wenn durchweg $b_r = a_r + 1$ ist. In diesem Falle ist aber wegen $N_m + Z_{m-1} < 2N_{m-1}$

$$N_m - N_{m-1} < N_{m-1} - Z_{m-1},$$

woraus sich mit Hilfe der Formeln (33), in denen jetzt durchweg das Gleichheitszeichen Geltung hat,

$$a_1 a_2 \cdots a_m < 1$$

ergibt. Wegen der Periodizität des Kettenbruches (30) konvergiert jetzt die unendliche Reihe (4) in Nr. 5 und nach dem dort aufgestellten Satze ist daher $|K| < 1$. Folglich ist stets $K = x_1$.

Fassen wir nun alle Fälle zusammen, so können wir sagen: Die zum Kettenbruche (30) gehörige quadratische Gleichung hat stets zwei negative Wurzeln, von denen die absolut kleinere oder, falls sie gleich sind, ihr gemeinsamer Wert den Grenzwert des Kettenbruches darstellt.

Dasselbe Resultat läßt sich selbstverständlich auch mit Hilfe des Satzes in Nr. 10 erreichen, und wir haben einen anderen Weg hier nur deshalb eingeschlagen, um die auf den vorliegenden Kettenbruch sich beziehende, auf S. 552 gemachte Bemerkung zu bestätigen.

13. Periodizität des regelmäßigen Kettenbruches, in den sich jede irrationale reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten entwickeln läßt.

Sind die Elemente eines periodischen Kettenbruches rationale, ganze oder gebrochene Zahlen, so kommt dieselbe Eigenschaft auch den sämtlichen Näherungszählern und Näherungsnennern zu. Nach Nr. 10 ist daher der Grenzwert eines solchen Kettenbruches, falls derselbe konvergiert, eine Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die man jederzeit auch durch ganzzahlige ersetzen kann. Das erste Beispiel von Nr. 12 hat aber gezeigt, daß sich auch umgekehrt stets die eine Wurzel einer solchen Gleichung in einen eingliedrig und rein periodischen Kettenbruch verwandeln läßt. Für die zweite Wurzel derselben Gleichung erhält man dann einen gemischt periodischen Kettenbruch. Denn sind x_1 und x_2 die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + bx = a$ und ist $x_1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots$, so hat man

$$x_2 = -b - x_1 = -b - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots .^{1})$$

Es läßt sich aber weiter zeigen, daß sowohl der einfache[2]) als auch der reduziert-regelmäßige Kettenbruch, in welchen sich jede irrationale reelle Wurzel x einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten nach Nr. 4 bezw. Nr. 5 verwandeln läßt, periodisch und zwar im allgemeinen gemischt periodisch ist. Der Beweis kann für den letzteren Fall in ähnlicher Weise geführt werden wie für den ersteren. Wir begnügen uns daher, hier den Nachweis der Periodizität für den einfachen Kettenbruch zu erbringen.

Jede quadratische Gleichung mit rationalen Koeffizienten kann auf die Form

$$ax^2 - 2bx = c \qquad (1)$$

gebracht werden, worin a, b, c ganze Zahlen sind. Da die Wurzeln derselben reell und irrational sein sollen, so muß die Diskriminante

---

1) Über den einfachen Zusammenhang zwischen den Perioden der Kettenbrüche, die sich durch Entwicklung der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ergeben, vgl. bezüglich der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung Galois, Gergonne Annal. 19 (1828), S. 294, — bezüglich der Entwicklung in reduziert-regelmäßige Kettenbrüche A. F. Möbius, Werke Bd. 4, S. 526, — bezüglich der durch Entwicklung nach nächsten Ganzen sich ergebenden Kettenbrüche Hurwitz, Acta math. Bd. 12 (1889), S. 399. — Vgl. ferner Landsberg, Journal f. Math. Bd. 109, S. 231—237 und A. Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 30 (1900), S. 482—488.

2) Lagrange, Oeuvres 2, S. 609. — Vgl. auch Serret, Handbuch der höheren Algebra I. Teil, 2. Kap., woselbst sich eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften der den Irrationalitäten zweiten Grades entsprechenden regelmäßigen periodischen Kettenbrüche findet.

$D = b^2 + ac$ positiv und $\sqrt{D}$ irrational sein. Jede der beiden Wurzeln der Gleichung (1) kann in der Form

$$x = \frac{b + \varepsilon\sqrt{D}}{a} = \frac{\varepsilon b + \sqrt{D}}{\varepsilon a} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

angeschrieben werden. Das Zeichen ε denken wir uns nun fest gewählt und setzen $\varepsilon b = p$ und $\varepsilon a = q$, so daß

$$x = \frac{p + \sqrt{D}}{q} \quad \text{und} \quad D = p^2 + \varepsilon cq \tag{2}$$

wird. Nach Nr. 4 läßt sich x in einen regelmäßigen unendlichen Kettenbruch

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots \tag{3}$$

entwickeln, worin die Elemente $b_0, b_1, b_2, \cdots$ durch die Relationen (η) in Nr. 4 bestimmt sind. Wir verwenden die dort gebrauchten Bezeichnungen $x_1, x_2, x_3, \cdots$ auch hier und haben dann

$$x = \frac{p + \sqrt{D}}{q} = b_0 + x_1, \quad x_1 = \frac{p - b_0 q + \sqrt{D}}{q},$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{q}{(p - b_0 q) + \sqrt{D}} = \frac{(b_0 q - p) + \sqrt{D}}{\{D - (p - b_0 q)^2\} : q} = \frac{p_1 + \sqrt{D}}{q_1} = b_1 + x_2,$$

worin

$$p_1 = b_0 q - p \quad \text{und} \quad q_1 = \{D - (p - b_0 q)^2\} : q$$

gesetzt erscheint. Demnach ist p_1 eine ganze Zahl und dasselbe gilt, wie ein Blick auf die zweite Gleichung (2) unmittelbar erkennen läßt, auch von q_1. Weiter ergibt sich

$$\frac{1}{x_2} = \frac{q_1}{(p_1 - b_1 q_1) + \sqrt{D}} = \frac{(b_1 q_1 - p_1) + \sqrt{D}}{\{D - (p_1 - b_1 q_1)^2\} : q_1} = \frac{p_2 + \sqrt{D}}{q_2} = b_2 + x_3,$$

wobei

$$p_2 = b_1 q_1 - p_1, \quad q_2 = \{D - (p_1 - b_1 q_1)^2\} : q_1$$

ist. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man allgemein

$$\frac{1}{x_n} = \frac{p_n + \sqrt{D}}{q_n} = b_n + x_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4}$$

und zwar folgt aus dieser Herleitung der Zahlen p_n und q_n sofort, daß dieselben rational sind. Wir werden aber sogleich zeigen, daß dieselben sämtlich ganze und von einer bestimmten Stelle des Zeigers n an auch positive Zahlen sind. Es ist nämlich

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n + x_{n+1}} = \frac{Z_n + Z_{n-1} x_{n+1}}{N_n + N_{n-1} x_{n+1}},$$

also mit Rücksicht auf die erste Gleichung (2)

$$\frac{p+\sqrt{D}}{q} = \frac{Z_n + Z_{n-1}x_{n+1}}{N_n + N_{n-1}x_{n+1}},$$

woraus man mit Benützung des aus (4) sich für x_{n+1} ergebenden Wertes die Beziehung

$$\frac{p+\sqrt{D}}{q} = \frac{p_{n+1}Z_n + q_{n+1}Z_{n-1} + Z_n\sqrt{D}}{p_{n+1}N_n + q_{n+1}N_{n-1} + N_n\sqrt{D}}$$

findet, die man auf die Form

$$A + B\sqrt{D} = A' + B'\sqrt{D}$$

bringen kann, in welcher

$$A = p(p_{n+1}N_n + q_{n+1}N_{n-1}) + N_nD, \quad A' = q(p_{n+1}Z_n + q_{n+1}Z_{n-1}),$$
$$B = pN_n + p_{n+1}N_n + q_{n+1}N_{n-1}, \quad B' = qZ_n$$

ist. Zufolge der Irrationalität von $\sqrt{D}$ muß nun aber $A = A'$ und $B = B'$ sein, woraus sich

$$\left.\begin{aligned}(qZ_n - pN_n)p_{n+1} + (qZ_{n-1} - pN_{n-1})q_{n+1} &= N_nD\\ N_np_{n+1} + N_{n-1}q_{n+1} &= qZ_n - pN_n\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ergibt. Diese beiden Gleichungen lösen wir nach p_{n+1} und q_{n+1} auf und erhalten, indem wir noch beachten, daß

$$Z_nN_{n-1} - N_nZ_{n-1} = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$$

ist,

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{n+1}qp_{n+1} &= N_nN_{n-1}D - (qZ_n - pN_n)(qZ_{n-1} - pN_{n-1})\\ (-1)^{n+1}qq_{n+1} &= (qZ_n - pN_n)^2 - N_n^2D.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hieraus ist im Hinblicke auf die zweite Gleichung (2) unmittelbar ersichtlich, daß neben p und q auch p_{n+1} und q_{n+1} ganzzahlig sind und zwar für jeden Wert $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Daß p_{n+1} und q_{n+1} mindestens von einer bestimmten Stelle an positiv sind, kann man in folgender Art zeigen. Wir ersetzen in der zweiten Gleichung (5) die Größe p durch den ihr zufolge der ersten Gleichung (2) zukommenden Wert $qx - \sqrt{D}$ und dividieren hierauf die beiden Seiten der Gleichung durch N_n, so daß wir, wenn K_n wie gewöhnlich den n^{ten} Näherungsbruch bedeutet,

$$p_{n+1} + \frac{N_{n-1}}{N_n}q_{n+1} = q(K_n - x) + \sqrt{D}$$

erhalten. Demnach ist zufolge (4)

$$p_{n+1}\left(1 + \frac{N_{n-1}}{N_n}x_{n+1}\right) = q(K_n - x) + \left(1 - \frac{N_{n-1}}{N_n}x_{n+1}\right)\sqrt{D}$$

und somit wegen $0 < x_{n+1} < 1$

$$p_{n+1}\left(1 + \frac{N_{n-1}}{N_n} x_{n+1}\right) > q(K_n - x) + \frac{N_n - N_{n-1}}{N_n}\sqrt{D}. \qquad (7)$$

Da nun K_n bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert x hat, so gibt es zu jeder Zahl $\sigma > 0$ eine andere $\mu > 0$ von der Art, daß für alle Werte $n > \mu$

$$|K_n - x| < \sigma$$

ist. Die rechte Seite der Ungleichung (7) ist daher jedenfalls positiv, wenn wir

$$\sigma < \frac{N_n - N_{n-1}}{|q| \cdot N_n}\sqrt{D}$$

nehmen, und somit ist dann auch p_{n+1} positiv. Mindestens für dieselben Werte von n, d. i. für $n > \mu$, muß zufolge (4) auch q_{n+1} positiv sein. Dies ergibt sich übrigens auch aus der zweiten Gleichung (6), indem man darin p durch $qx - \sqrt{D}$ ersetzt.

Aus dem Umstande, daß für $n > \mu + 1$ sowohl p_n als auch q_n positive ganze Zahlen sind, läßt sich nun die Periodizität des Kettenbruches sehr leicht folgern. Nach (4) ist nämlich

$$x_{n-1} = \frac{1}{b_{n-1} + x_n} = \frac{q_{n-1}}{p_{n-1} + \sqrt{D}} \quad \text{und} \quad x_n = \frac{q_n}{p_n + \sqrt{D}},$$

also

$$x_n x_{n-1} + b_{n-1} x_{n-1} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{q_n q_{n-1}}{(p_{n-1} + \sqrt{D})(p_n + \sqrt{D})} + \frac{b_{n-1} q_{n-1}}{p_{n-1} + \sqrt{D}} = 1,$$

woraus sich wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$

$$q_n q_{n-1} + b_{n-1} q_{n-1} p_n = p_n p_{n-1} + D \quad \text{und} \quad b_{n-1} q_{n-1} = p_n + p_{n-1} \qquad (8)$$

ergibt. Substituiert man nun in der ersten dieser Gleichungen an Stelle von p_{n-1} den aus der zweiten hierfür sich ergebenden Wert, so erhält man

$$p_n^2 + q_n q_{n-1} = D, \quad \text{also} \quad p_n < \sqrt{D} \quad (n > \mu + 2). \qquad (9)$$

Dazu gewinnt man aus der zweiten Gleichung (8), indem man dort n durch $n + 1$ ersetzt, noch

$$b_n q_n = p_{n+1} + p_n < 2\sqrt{D}, \quad \text{also} \quad q_n < 2\sqrt{D} \quad \text{und} \quad b_n < 2\sqrt{D}. \qquad (10)$$

Da demnach für $n > \mu + 2$

$$0 < p_n < \sqrt{D} \quad \text{und} \quad 0 < q_n < 2\sqrt{D}$$

ist, so gibt es nur eine begrenzte Anzahl verschiedener Wertepaare p_n, q_n. Läßt man also n nacheinander die Werte $1, 2, 3, \ldots$ durch-

laufen, so muß man zu einem Werte n_0 von n gelangen, wofür das Wertepaar p_{n_0}, q_{n_0} einem früheren p_{n_0-m}, q_{n_0-m} gleich wird, und es ist dann nicht nur auch $b_{n_0} = b_{n_0-m}$, sondern allgemein

$$p_{n_0+r} = p_{n_0+r-m},\ q_{n_0+r} = q_{n_0+r-m},\ b_{n_0+r} = b_{n_0+r-m}\ (r = 0, 1, 2, \cdots). \quad (11)$$

Der Kettenbruch ist somit periodisch.

Sind n_0 und m die kleinsten Zahlen, wofür diese Gleichungen (11) stattfinden, so ist m die Anzahl der Glieder der Periode und $\frac{1}{b_{n_0-m}}$ ist der Teilbruch, bei welchem die Periode beginnt.

Aus (9) und (10) ergibt sich noch eine obere Grenze sowohl für die Anzahl m der Glieder der Periode als auch für die Teilnenner b_n, welche zur Periode gehören. Bezeichnet nämlich δ die größte in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl, so kann, $n > \mu + 2$ vorausgesetzt, p_n höchstens die Werte $1, 2, 3, \ldots \delta$ und q_n, da nach (10) $b_n q_n = p_n + p_{n+1}$, also $b_n q_n \leq 2\delta$ ist, höchstens die Werte $1, 2, 3, \ldots 2\delta$ durchlaufen; folglich ist $m \leqq 2\delta^2$. b_n kann, sobald als $n > \mu + 2$ ist, nur die Werte $1, 2, 3, \ldots 2\delta$ durchlaufen, so daß 2δ, der größte Wert ist, den b_n überhaupt erreichen kann.

14. Der Legendresche Irrationalitätssatz.

Wenn die Elemente eines konvergenten periodischen Kettenbruches sämtlich rationale Zahlen sind, so läßt sich auf Grund des Satzes von Nr. 10 sofort entscheiden, ob der Grenzwert des Kettenbruches rational oder irrational sei. Bei einem nicht-periodischen Kettenbruche wird, wenn auch seine Elemente rational sind, diese Entscheidung im allgemeinen nicht möglich sein, da sich der Grenzwert eines solchen Kettenbruches in der Regel nicht in geschlossener Form darstellen läßt.

Doch gilt der folgende Satz:

Satz.[1]) Bedeuten in dem unendlichen Kettenbruche

$$K \equiv \frac{\varepsilon_1 a_1}{b_1} + \frac{\varepsilon_2 a_2}{b_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n a_n}{b_n} + \cdots \quad (1)$$

die ε_n unabhängig voneinander je eine der Einheiten $+1$ oder -1 und sind die Teilzähler a_n sowie die Teilnenner b_n sämtlich positive ganze Zahlen, welche für alle Werte $n \geqq 1$, falls durchweg $\varepsilon_n = +1$ ist, der Relation $b_n \geqq a_n$, dagegen

1) Vgl. Legendre, Éléments de Géométrie, Note 4. Der Legendresche Satz in deutscher Übersetzung findet sich auch bei Rudio „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre“ S. 161. — Daß, falls durchweg $\varepsilon_n = 1$ ist, die Bedingung $b_n \geqq a_n$ genügt, hat Stolz bemerkt, vgl. Allgem. Arithmetik II, S. 297. — Der Beweis des Satzes in dem hier gegebenen Umfange nach Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 28 (1898), S. 317.

falls von den ε_n mindestens eines den Wert -1 hat, der Relation

$$b_n \geqq a_n + 1 \tag{2}$$

genügen, so ist K eine irrationale Zahl mit Ausnahme des Falles, wo in der Relation (2) von einem bestimmten Werte $n = m$ angefangen durchweg das Gleichheitszeichen steht und zugleich für alle Werte $n \geqq m$ $\varepsilon_{n+1} = -1$ ist. In diesem Ausnahmsfalle ist der Grenzwert K des Kettenbruches rational, und zwar ist $\varepsilon_1 K = 1$ oder aber $\varepsilon_1 K$ ein positiver echter Bruch, je nachdem $m = 1$ oder $m > 1$ ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß unter den hier angegebenen Bedingungen der Kettenbruch (1) gemäß des Kriteriums 3) in Nr. 3, bezw. des Satzes 1a in Nr. 8 in jedem Falle unbedingt konvergiert, woraus folgt, daß auch die sämtlichen Kettenbrüche

$$R_n \equiv \left[\frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

unbedingt konvergent sind. Auch ist leicht einzusehen, daß $\varepsilon_n R_n$ stets positiv ist. Falls durchweg $\varepsilon_n = 1$ ist, so ist dies selbstverständlich. In den übrigen Fällen gilt die Bedingung (2) und es ist nach dem Satze 1a in Nr. 8 für alle Werte von n $|R_n| \leqq 1$, also

$$b_n + R_{n+1} \geqq b_n - 1 \geqq a_n > 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_n R_n = \frac{a_n}{b_n + R_{n+1}} > 0.$$

Wir betrachten nun zunächst den obigen Ausnahmsfall, in welchem

$$b_n = a_n + 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{n+1} = -1 \quad (n = m, m+1, m+2, \cdots) \tag{3}$$

ist. Hier hat man nach Nr. 5 $\varepsilon_m R_m = 1$, also, falls $m = 1$ ist, $\varepsilon_1 K = \varepsilon_1 R_1 = 1$; dagegen, wenn $m > 1$ ist,

$$\varepsilon_1 K \equiv \frac{a_1}{b_1} \dotplus \frac{\varepsilon_2 a_2}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{\varepsilon_{m-1} a_{m-1}}{b_{m-1} + \varepsilon_m},$$

woraus die Rationalität von K für diesen Fall ersichtlich ist. Auch ist hier nach Nr. 8 $|K| < 1$, also $\varepsilon_1 K$ ein echter Bruch.

Nunmehr machen wir die Annahme, es seien die Ausnahmsbedingungen (3), wie groß man darin m auch wählen möge, nicht erfüllt. Dann ist unter den jetzt geltenden Bedingungen unseres Satzes stets

$$|R_n| < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{4}$$

Der Beweis der Irrationalität von K im vorliegenden Falle kann indirekt geführt werden. Gesetzt, es sei K rational und somit $\varepsilon_1 K$

ein positiver echter Bruch, welcher auf die reduzierte Form gebracht $\frac{p_1}{p_0}$ lauten möge, dann hätte man

$$K = \frac{\varepsilon_1 p_1}{p_0} = \frac{\varepsilon_1 a_1}{b_1 + R_2}, \quad \text{also} \quad R_2 = \frac{a_1 p_0 - b_1 p_1}{p_1}.$$

Demnach wäre auch R_2 rational und zwar zufolge (4) ein echter Bruch mit dem Nenner p_1. Da $\varepsilon_2 R_2$ positiv ist, könnte man $R_2 = \frac{\varepsilon_2 p_2}{p_1}$ setzen und es wäre dann p_2 eine natürliche Zahl kleiner als p_1. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise würde man nacheinander

$$\varepsilon_1 K = \varepsilon_1 R_1 = \frac{p_1}{p_0}, \; \varepsilon_2 R_2 = \frac{p_2}{p_1}, \; \varepsilon_3 R_3 = \frac{p_3}{p_2}, \; \cdots \; \varepsilon_n R_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}, \; \cdots$$

bekommen, worin für die natürlichen Zahlen p_n die Beziehung $p_n < p_{n-1}$ in unbegrenzter Folge für $n = 1, 2, 3, \ldots$ stattfinden müßte. Dies ist aber nicht möglich, da die Anzahl jener natürlichen Zahlen, die kleiner als p_0 sind, endlich ist. Unsere Annahme, daß K unter den vorliegenden Bedingungen rational sei, entspricht also nicht der Wirklichkeit und es ist somit K irrational.

Zusätze. 1) „Sind in dem Kettenbruche (1) die Elemente a_n, b_n für $n = 1, 2, \cdots m-1$ beliebige rationale Zahlen, dagegen für $n \geqq m$ natürliche Zahlen, welche, falls für $n \geqq m$ durchweg $\varepsilon_n = 1$ ist, die Bedingung $b_n \geqq a_n$, falls dagegen nicht durchweg $\varepsilon_n = 1$ ist, die Bedingung (2) und zwar die letztere in der Weise erfüllen, daß in derselben, falls von einem bestimmten Werte des n angefangen beständig $\varepsilon_n = -1$ ist, das Ungleichheitszeichen unendlich oft steht, so ist der Kettenbruch unbedingt konvergent und sein Grenzwert irrational."

Denn nach Formel (IX, b) in X, 5 hat man, wenn darin $k + r = n$ gesetzt wird, mit Bezug auf den Kettenbruch (1)

$$K_n - K_k = \frac{(-1)^k \varepsilon_1 a_1 \cdot \varepsilon_2 a_2 \cdots \varepsilon_{k+1} a_{k+1}}{N_k (R_{k+2,n} N_k + N_{k+1})}. \tag{5}$$

Wir denken uns hier $k \geqq m-2$ genommen und dabei so gewählt, daß N_k nicht verschwindet, was ja möglich ist, indem nie zwei unmittelbar aufeinander folgende Näherungsnenner zugleich Null sind. Dann ist $\lim\limits_{n=+\infty} R_{k+2,n} = R_{k+2}$ dem vorigen Satze gemäß eine irrationale Zahl, so daß auch $R_{k+2} N_k + N_{k+1}$ irrational ist. Durch den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ ergibt sich nun aus der vorstehenden Formel

$$K = K_k + \frac{(-1)^k \varepsilon_1 a_1 \cdot \varepsilon_2 a_2 \cdots \varepsilon_{k+1} a_{k+1}}{N_k (R_{k+2} N_k + N_{k+1})},$$

woraus die Irrationalität von K direkt ersichtlich ist. Dieselbe Eigenschaft wie K hat auch jeder der Kettenbrüche R_n, so daß K unbedingt konvergiert.

2) „Sind in dem Kettenbruche (1) die Elemente a_n, b_n für $n = 1, 2, \cdots m-1$ beliebige rationale Zahlen, dagegen für $n \geqq m$ natürliche Zahlen, welche der Bedingung $b_n = a_n + 1$ genügen, und ist für die letzteren Werte von n beständig $\varepsilon_{n+1} = -1$, so kann der Kettenbruch sowohl konvergieren als divergieren; im Falle der Konvergenz ist sein Grenzwert rational.“ — Die Rationalität des Grenzwertes, falls derselbe überhaupt vorhanden und endlich ist, ergibt sich wieder aus der obigen Formel (5). Daß der Kettenbruch aber nicht notwendig zu konvergieren braucht, zeigt der gemischt periodische Kettenbruch

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \frac{1}{2} \dot{-} \cdots$$

mit der Periode $-\frac{1}{2}$, dessen Grenzwert $+\infty$ ist.

Denkt man sich in dem Kettenbruche (1) durchweg $\varepsilon_n = 1$ oder durchweg $\varepsilon_n = -1$ gesetzt, so bildet der obige Satz die Umkehrung des folgenden:

„Versteht man unter $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ eine endlose, genau definierte Reihe von natürlichen Zahlen, so läßt sich jede irrationale Zahl x verwandeln sowohl in einen unendlichen Kettenbruch von der Form

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n} \dot{+} \cdots,$$

worin b_n von $n = 1$ an natürliche Zahlen, die der Relation $b_n \geqq a_n$ genügen, bedeuten, als auch in einen solchen von der Form

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} \dot{-} \frac{a_2}{b_2} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{b_n} \dot{-} \cdots,$$

worin die b_n von $n = 1$ an natürliche, der Relation $b_n \geqq a_n + 1$ entsprechende Zahlen bezeichnen. b_0 kann in beiden Fällen irgend eine ganze rationale Zahl sein.“ — Der Beweis des ersten Teiles dieses Satzes wird so, wie der des entsprechenden Satzes in Nr. 4, der einen besonderen Fall desselben bildet, geführt, der des zweiten Teiles so, wie der des entsprechenden Satzes in Nr. 5.

15. Verwandlung einer unendlichen Reihe in einen unendlichen Kettenbruch.[1])

In Nr. 2 wurde gezeigt, daß sich jeder unendliche Kettenbruch $K \equiv \left[b_0 + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, dessen sämtliche Näherungsnenner von Null verschieden sind, in eine äquivalente unendliche Reihe von der Gestalt

$$c_0 + c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{r-1} c_r + \cdots \qquad (1)$$

1) Euler, Introductio in Anal. inf. I, § 368—373.

verwandeln läßt, worin

$$c_0 = b_0,\ c_1 = \frac{a_1}{N_1},\ c_r = \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{N_{r-1} N_r} \quad (r = 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

ist. Zufolge der Äquivalenz von Reihe und Kettenbruch ist

$$K_n = c_0 + \sum_1^n (-1)^{r-1} c_r \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

Diese Gleichungen dienen nun auch zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, d. i. zur Verwandlung der Reihe (1) in einen äquivalenten unendlichen Kettenbruch. Die letztere Aufgabe ist insofern unbestimmt, als dabei jeder Kettenbruch durch jeden ihm äquivalenten ersetzt werden darf. Um einen mit der Reihe (1) äquivalenten Kettenbruch zu erhalten, kann man daher die Näherungsnenner zunächst willkürlich sein lassen, und man gewinnt dann aus den Gleichungen (2) die Beziehungen

$$b_0 = c_0,\quad a_1 = c_1 N_1,\quad a_r = \frac{c_r N_r}{c_{r-1} N_{r-2}} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots), \tag{4}$$

wobei $N_0 = 1$ zu nehmen ist. Hinsichtlich der Teilnenner des Kettenbruches gelten die Relationen

$$b_1 = N_1,\ b_r = \frac{(c_{r-1} - c_r) N_r}{c_{r-1} N_{r-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots), \tag{5}$$

von denen sich die letzteren auf Grund der Formel

$$N_r = b_r N_{r-1} + a_r N_{r-2}$$

aus (2) ergeben.

Wir wollen nun zunächst die Näherungsnenner N_r so wählen, daß die a_r und b_r ganze Funktionen der c_r werden. Zu diesem Zwecke reicht es hin,

$$N_1 = 1 \quad \text{und} \quad N_r = c_1 c_2 \cdots c_{r-1} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots)$$

anzunehmen. Dadurch wird

$$a_1 = c_1,\quad b_1 = 1,\quad a_2 = c_2,\quad b_2 = c_1 - c_2,$$
$$a_r = c_{r-2} c_r,\quad b_r = c_{r-1} - c_r \quad (r = 3, 4, 5, \cdots),$$

so daß man die Gleichung erhält

$$c_0 + \sum_1^n (-1)^{r-1} c_r =$$

$$= c_0 + \frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{c_1 - c_2} + \frac{c_1 c_3}{c_2 - c_3} + \cdots + \frac{c_{n-2} c_n}{c_{n-1} - c_n} \quad (n = 3, 4, \cdots). \tag{A}$$

Von besonderem Interesse ist diese Kettenbruchentwicklung für den Fall, daß die Reihe nach ganzen (positiven oder negativen) Potenzen einer Veränderlichen fortschreitet. Um für solche Reihen möglichst einfache Kettenbrüche zu erhalten, nehmen wir zunächst an, es sei in der Reihe (1)

$$c_0 = 0 \quad \text{und} \quad c_r = \frac{\alpha_r x^r}{\beta_r y^r} \quad (r = 1, 2, 3, \cdots).$$

Zufolge (4) und (5) ist dann

$$a_1 = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1 y} N_1, \quad a_r = \frac{\alpha_r \beta_{r-1} x}{\alpha_{r-1} \beta_r y} \cdot \frac{N_r}{N_{r-2}},$$

$$b_r = \frac{\alpha_{r-1}\beta_r y - \alpha_r \beta_{r-1} x}{\alpha_{r-1}\beta_r y} \cdot \frac{N_r}{N_{r-1}} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots).$$

Nimmt man demnach

$$N_1 = \beta_1 y \quad \text{und} \quad N_r = \alpha_{r-1}\beta_r y N_{r-1} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots),$$

so erhält man aus (3)

$$\sum_1^n (-1)^{r-1} \frac{\alpha_r x^r}{\beta_r y^r} =$$

$$= \frac{\alpha_1 x}{\beta_1 y} + \frac{\alpha_2 \beta_1^2 x y}{\alpha_1 \beta_2 y - \alpha_2 \beta_1 x} + \cdots + \frac{\alpha_{n-2}\alpha_n \beta_{n-1}^2 x y}{\alpha_{n-1}\beta_n y - \alpha_n \beta_{n-1} x} \qquad (B)$$

$$(n = 3, 4, 5, \cdots).$$

Läßt man hier $y = 1$ sein, so hat man die Kettenbruchentwicklung für eine ganze Potenzreihe vor sich; nimmt man dagegen $x = 1$, so stellt die Formel die Kettenbruchentwicklung für eine nach negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe dar. Als besondere Fälle von (B) verdienen noch die beiden Formeln

$$\sum_1^n (-1)^{r-1} \alpha_r x^r = \frac{\alpha_1 x}{1} + \frac{\alpha_2 x}{\alpha_1 - \alpha_2 x} + \frac{\alpha_1 \alpha_3 x}{\alpha_2 - \alpha_3 x} + \cdots + \frac{\alpha_{n-2}\alpha_n x}{\alpha_{n-1} - \alpha_n x} \qquad (C)$$

und

$$\sum_1^n (-1)^{r-1} \frac{x^r}{\beta_r} = \frac{x}{\beta_1} + \frac{\beta_1^2 x}{\beta_2 - \beta_1 x} + \frac{\beta_2^2 x}{\beta_3 - \beta_2 x} + \cdots + \frac{\beta_{n-1}^2 x}{\beta_n - \beta_{n-1} x} \qquad (D)$$

hervorgehoben zu werden.

Ist in der Reihe (1)

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1 y}, \quad c_r = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r x^r}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r y^r} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots),$$

so ergeben die Formeln (4) und (5)

$$a_1 = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1 y} N_1, \quad a_r = \frac{\alpha_r x}{\beta_r y} \cdot \frac{N_r}{N_{r-2}}, \quad b_r = \frac{\beta_r y - \alpha_r x}{\beta_r y} \cdot \frac{N_r}{N_{r-1}} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots).$$

Der Kettenbruch erhält hier die einfachste Form, indem man

$$N_1 = \beta_1 y, \quad N_r = \beta_r y N_{r-1} \quad (r = 2, 3, 4, \cdots)$$

setzt, worauf man aus (3) die Gleichung

$$\sum_1^n (-1)^{r-1} \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r x^r}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r y^r} = \frac{\alpha_1 x}{\beta_1 y} + \frac{\alpha_2 \beta_1 xy}{\beta_2 y - \alpha_2 x} + \cdots + \frac{\alpha_n \beta_{n-1} xy}{\beta_n y - \alpha_n x} \quad \text{(E)}$$

gewinnt. Ist darin $y = 1$ und allgemein $\alpha_r = 1$, so nimmt diese Gleichung die einfache Gestalt an

$$\sum_1^n (-1)^{r-1} \frac{x^r}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_r} = \frac{x}{\beta_1} + \frac{\beta_1 x}{\beta_2 - x} + \frac{\beta_2 x}{\beta_3 - x} + \cdots + \frac{\beta_{n-1} x}{\beta_n - x} \quad \text{(F)}$$
$$(n = 2, 3, 4, \cdots).$$

Beispiele. 1) Nach (D) ergibt sich für alle Werte von x, deren absoluter Betrag 1 nicht übersteigt mit Ausnahme von $x = -1$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots =$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{x}{2-x} + \frac{2^2 x}{3-2x} + \frac{3^2 x}{4-3x} + \cdots; \qquad (6)$$

für alle anderen Werte von x divergiert sowohl die Reihe als auch der Kettenbruch.

2) Auf Grund derselben Formel erhält man für alle x, deren absoluter Betrag 1 nicht überschreitet, außer $x = \pm i$

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots =$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{3-x} + \frac{3^2 x^2}{5-3x} + \frac{5^2 x^2}{7-5x} + \cdots$$

3) Mit Hilfe von (F) ergibt sich in leicht ersichtlicher Weise für jeden Wert von x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} \dot{-} \frac{x}{2+x} \dot{-} \frac{2x}{3+x} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{(n-1)x}{n+x} \dot{-} \cdots$$

Falls man von der Äquivalenz absieht, kann die Verwandlung einer Reihe (1) in einen Kettenbruch auch so vorgenommen werden, daß lediglich die Bedingung

$$\lim_{n=+\infty} (s_n - K_n) = 0, \qquad (7)$$

worin

$$s_n = c_0 + c_1 - c_2 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n$$

gesetzt erscheint, erfüllt ist. Sind dabei Reihe und Kettenbruch Funktionen einer Veränderlichen x, so kann man sich auch damit begnügen, daß die Beziehung (7) nur für jene Werte von x besteht, für welche die Reihe konvergiert, während der Kettenbruch auch einen größeren Konvergenzbereich haben darf.

So läßt sich z. B. die Funktion

$$\frac{x}{l(1+x)} = 1 : \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right)$$

für alle x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, in eine Potenzreihe nach x und somit nach der Formel (C) oder (D) in einen dieser Reihe äquivalenten Kettenbruch entwickeln. Andererseits ergibt sich aber aus (6) für diese Funktion unmittelbar die Darstellung

$$\frac{x}{l(1+x)} = 1 + \frac{x}{2-x} + \frac{2^2x}{3-2x} + \frac{3^2x}{4-3x} + \cdots \qquad (8)$$

Die genannte Potenzreihe divergiert für alle Werte von x, wofür $|x| > 1$ ist, während der Kettenbruch (8) sicher für die reellen darunter konvergiert und zwar den Grenzwert Null hat.

16. Verwandlung des Quotienten zweier ganzen Potenzreihen in einen Kettenbruch.[1])

Es seien $F_0(x)$ und $F_1(x)$ zwei Reihen nach ganzen positiven Potenzen von x, wobei x zugleich einen Wert in ihrem gemeinsamen Konvergenzbereiche bezeichnet. Wenn $F_1(0)$ nicht Null ist, so ist

$$F_0(x) - \frac{F_0(0)}{F_1(0)} F_1(x)$$

eine ganze Potenzreihe nach x ohne ein von x freies Glied. Nehmen wir an, daß sie mit dem Gliede mit x beginne, und bezeichnen wir $F_0(0) : F_1(0)$ mit b_0, so können wir

$$F_0(x) = b_0 F_1(x) + a_1 x F_2(x)$$

setzen, worin a_1 irgend eine von Null verschiedene Zahl sein kann und $F_2(x)$ eine ganze Potenzreihe nach x bedeutet. Ist $F_2(0)$ nicht Null, so hat man auf ähnliche Art

$$b_1 = F_1(0) : F_2(0) \quad \text{und} \quad F_1(x) = b_1 F_2(x) + a_2 x F_3(x),$$

wo a_2 irgend eine von Null verschiedene Zahl sein kann. Sind $F_3(0)$, $F_4(0)$, ... nicht Null, so darf man

---

1) Das folgende Verfahren ist von Legendre a. a. O. zu den Entwicklungen in Nr. 17 benützt worden, ferner von Gauß in der Theorie der hypergeometrischen Reihe (Werke III, S. 134). — Die Konvergenzbetrachtung nach Schlömilch, Algebr. Analysis, 2. Aufl. § 78, 3. u. 4. Aufl. § 67.

$$b_n = F_n(0) : F_{n+1}(0),$$
$$F_n(x) = b_n F_{n+1}(x) + a_{n+1} x F_{n+2}(x) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

setzen, worin $a_3, a_4, \cdots$ beliebige von Null verschiedene Zahlen sein dürfen. Da mithin, wenn nur x ein solcher Wert ist, daß keine der Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... verschwindet,

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{F_1(x) : F_2(x)}$$
$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = b_1 + \frac{a_2 x}{F_2(x) : F_3(x)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ist, so erhält man für $F_0(x) : F_1(x)$ zunächst den endlichen Kettenbruch

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} \dotplus \frac{a_2 x}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_n x}{b_n} \dotplus \frac{a_{n+1} x F_{n+2}(x)}{F_{n+1}(x)}. \tag{9}$$

Damit man von dieser Formel, worin, wie wir annehmen, n jede natürliche Zahl sein darf, zur Entwicklung des Quotienten $F_0(x) : F_1(x)$ in einen unendlichen Kettenbruch

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} \dotplus \frac{a_2 x}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_n x}{b_n} \dotplus \cdots \tag{G}$$

übergehen darf, ist notwendig und hinreichend, daß der rechts stehende Kettenbruch konvergiert und den Grenzwert $F_0(x) : F_1(x)$ besitzt. Wird $F_n(x) : F_{n+1}(x)$ $(n \geq 1)$ mit $P_n(x)$, der n^{te} Näherungsbruch des Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1 x}{b_1} \dotplus \frac{a_2 x}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{a_n x}{b_n} \dotplus \cdots \tag{10}$$

mit K_n und entsprechend sein Zähler mit Z_n, sein Nenner mit N_n bezeichnet, so hat man nach den Formeln (II) in X, 3

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \frac{a_{n+1} x Z_{n-1} + P_{n+1}(x) Z_n}{a_{n+1} x N_{n-1} + P_{n+1}(x) N_n},$$

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} - K_n = \frac{a_{n+1} x N_{n-1}}{a_{n+1} x N_{n-1} + P_{n+1}(x) N_n} (K_{n-1} - K_n). \tag{11}$$

Konvergiert der Kettenbruch (10), so hat der zweite Faktor rechts bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert Null. Bleibt der absolute Betrag des ersten Faktors

$$\frac{a_{n+1} x N_{n-1}}{a_{n+1} x N_{n-1} + P_{n+1}(x) N_n} \tag{12}$$

für alle Werte von n unter einer bestimmten Zahl, so ist sicher

$$\lim_{n=+\infty} K_n = F_0(x) : F_1(x). \tag{13}$$

Ist x reell und sind $b_1, b_2, \cdots a_1 x, a_2 x, \cdots P_1(x), P_2(x), \cdots$ sämtlich positiv, so liegt der Ausdruck (12) zwischen 0 und 1 und es besteht die Relation (13), wofern nur der Kettenbruch (10) konvergiert.

Ist x_0 ein Wert von x, wofür

$$F_1(x_0), \quad F_2(x_0), \cdots F_{p-1}(x_0) \quad (p \geqq 2)$$

von Null verschieden, dagegen $F_p(x_0) = 0$ ist, so bricht der Kettenbruch auf der rechten Seite von (G) mit dem Gliede $a_{p-2} x_0 : b_{p-2}$ ab. Besteht aber die Gleichung

$$0 = b_p + \frac{a_{p+1} x_0}{b_{p+1}} \dot{+} \frac{a_{p+2} x_0}{b_{p+2}} \dot{+} \cdots,$$

so gilt die Formel (G) auch für $x = x_0$, was sich unmittelbar aus der Formel (X) in X, 5 ergibt, indem man dort $k = p - 1$ nimmt und hierauf r zur Grenze $+\infty$ übergehen läßt.

17. Anwendungen.

Betrachten wir die Potenzreihen

$$F_0(x) = 1 + \sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{m!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+m-1)},$$

$$F_n(x) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} + \sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{m!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n+m-1)},$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots),$$

welche, falls γ nicht Null oder eine negative ganze Zahl ist, für jeden endlichen Wert von x konvergieren, so finden wir sofort die Relationen

$$F_n(x) - (\gamma + n) F_{n+1}(x) = x F_{n+2}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wenden wir nun die Entwicklung der vorigen Nummer an, so entsteht die Frage, ob der Quotient $F_0(x) : F_1(x)$ dem unendlichen Kettenbruche

$$\gamma + \frac{x}{\gamma+1} \dot{+} \frac{x}{\gamma+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{x}{\gamma+n} \dot{+} \cdots \tag{14}$$

gleich ist. Bei Beantwortung derselben beschränken wir uns auf die Annahme, daß x reell und γ positiv sei, und unterscheiden zwei Fälle:

1) Es sei zunächst $x \geqq 0$; dann verschwindet weder $F_0(x)$ noch eine der Funktionen $F_n(x)$. Der Kettenbruch (14) konvergiert nach dem Kriterium 3) in Nr. 3 und man hat zufolge der Schlußbemerkung in Nr. 16

$$\frac{F_0(x)}{F_1(x)} = \gamma + \frac{x}{\gamma+1} \dot{+} \frac{x}{\gamma+2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{x}{\gamma+n} \dot{+} \cdots \tag{H}$$

Setzt man hier $\gamma = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{y^2}{4}$, so daß

$$F_0(x) = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$F_1(x) = 2 + \frac{2y^2}{3!} + \frac{2y^4}{5!} + \cdots = \frac{e^y - e^{-y}}{y}$$

wird, so ergibt sich die für jedes reelle y gültige Kettenbruchentwicklung

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \cdots + \frac{y^2}{2n+1} + \cdots$$

Ist y eine rationale Zahl $r : s$ (wo r eine ganze, s eine natürliche Zahl $\geqq 1$ bedeutet), so geht diese Formel über in

$$\frac{e^{\frac{r}{s}} - e^{-\frac{r}{s}}}{e^{\frac{r}{s}} + e^{-\frac{r}{s}}} = \frac{r}{s} + \frac{r^2}{3s} + \frac{r^2}{5s} + \cdots + \frac{r^2}{(2n+1)s} + \cdots$$

Hieraus ist der Satz zu entnehmen, daß jede rationale Potenz von e eine irrationale Zahl ist[1]) (woraus von selbst folgt, daß der natürliche Logarithmus einer jeden rationalen von 1 verschiedenen Zahl irrational sein muß). Wäre nämlich $e^{\frac{r}{s}}$ rational, so wäre es auch

$$\left(e^{\frac{r}{s}} - e^{-\frac{r}{s}}\right) : \left(e^{\frac{r}{s}} + e^{-\frac{r}{s}}\right).$$

Das ist indessen unmöglich, da der für diesen Quotienten erhaltene Kettenbruch zufolge des Satzes von Nr. 14 einen irrationalen Grenzwert besitzt.

Setzt man in der letzten Gleichung $r = 1$ und $s = 2$, so findet man die Entwicklung

$$\frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n+2} + \cdots$$

Daraus folgt, daß e nicht Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sein kann.[2]) Denn wäre das der Fall, so würde auch $(e-1) : (e+1)$ einer solchen Gleichung genügen; dieser Quotient müßte also einen periodischen einfachen Kettenbruch liefern, was jedoch, wie man sieht, nicht zutrifft.

---

1) Über die ersten Beweise der Irrationalität der Größen e und e^2 von Euler, der Größen π, e^x und $\tang x$ (bei rationalem x) von Lambert und Legendre vgl. Pringsheim, Ber. d. bayer. Ak. Bd. 28 (1898), S. 325—337.

2) Stern, Algebr. Analysis, S. 342.

2) Wenn x einen negativen Wert erhält, so kann dafür eine der Funktionen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... verschwinden. Von einem gewissen Werte p von n an wird jedoch keine der Funktionen $F_n(x)$ mehr Null sein. In der Tat ist nun

$$1 > \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)F_n(x) > 1 + \frac{x}{\gamma+n}, \tag{15}$$

wenn

$$\gamma + n + x \geqq 1$$

ist. Damit für alle Werte $n \geqq p$ $F_n(x) > 0$ sei, genügt es demnach, für p die kleinste natürliche Zahl zu nehmen, wofür

$$\gamma + p + x \geqq 1$$

ist. Dann konvergiert nach Nr. 5 der unendliche Kettenbruch

$$(\gamma+p-1) + \frac{x}{\gamma+p} \dot{+} \frac{x}{\gamma+p+1} \dot{+} \cdots$$

mit negativen Teilzählern und positiven Teilnennern. Bezeichnen wir seine Näherungsbrüche mit $K_{p-1,n}$ und deren Nenner mit $N_{p-1,n}$, so finden wir entsprechend der Formel (11) der vorigen Nummer

$$\frac{F_{p-1}(x)}{F_p(x)} - K_{p-1,n} = \frac{xN_{p-1,n-1}}{xN_{p-1,n-1} + P_{n+1}(x)N_{p-1,n}}(K_{p-1,n-1} - K_{p-1,n}). \tag{16}$$

Bringen wir den ersten Faktor auf die Form

$$\frac{x}{x + P_{n+1}(x)N_{p-1,n} : N_{p-1,n-1}},$$

so hat sein Nenner bei $\lim n = +\infty$ den Grenzwert $+\infty$. Es ist nämlich nach Nr. 5

$$N_{p-1,n} > N_{p-1,n-1} > 0$$

und nach (15)

$$P_{n+1}(x) = F_{n+1}(x) : F_{n+2}(x) > \gamma + n + x + 1,$$

somit

$$x + P_{n+1}(x)\frac{N_{p-1,n}}{N_{p-1,n-1}} > \gamma + n + 2x + 1.$$

Der absolute Betrag des ersten Faktors auf der rechten Seite der Gleichung (16) bleibt demnach für alle Werte $n \geqq p$ unter einer endlichen Zahl, so daß sich aus derselben

$$\lim_{n=+\infty} K_{p-1,n} = F_{p-1}(x) : F_p(x)$$

ergibt.

Aus dem Vorstehenden folgt weiter, daß auch für negative x, wenn x nicht eine Wurzel der Gleichung $F_1(x) = 0$ ist, die Formel (H) gilt. Denn der Grenzwert von (14) ist der Kettenbruch

$$\gamma + \frac{x}{\gamma+1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{x}{\gamma+p-2} \dot{+} \frac{xF_p(x)}{F_{p-1}(x)},$$

der nach der Formel (9) der vorigen Nummer den Wert $F_0(x) : F_1(x)$ hat.

Setzt man nun $\gamma = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{y^2}{4}$, so daß

$$F_0(x) = \cos y \quad \text{und} \quad F_1(x) = 2 \sin y : y$$

wird, so ergibt sich aus (H) die Formel

$$\operatorname{tang} y = \frac{y}{1} \dot{-} \frac{y^2}{3} \dot{-} \frac{y^2}{5} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{y^2}{2n+1} \dot{-} \cdots, \tag{17}$$

welche für alle reellen Werte von y, die nicht ungerade Vielfache von $\pm \frac{\pi}{2}$ sind, gilt.

Läßt man y wie oben eine rationale Zahl $r : s$ sein, so findet man die Kettenbruchentwicklung

$$\operatorname{tang} \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \dot{-} \frac{r^2}{3s} \dot{-} \frac{r^2}{5s} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{r^2}{(2n+1)s} \dot{-} \cdots,$$

woraus nach Nr. 14 unmittelbar hervorgeht, daß zu einem rationalen Argumente eine irrationale Tangente gehört. Demnach muß die Zahl π irrational sein; denn wäre π rational, so wäre auch $\frac{\pi}{4}$ rational, somit tang $\frac{\pi}{4}$ irrational, während doch tang $\frac{\pi}{4} = 1$ ist.

Aus (17) kann man noch schließen, daß π^2 irrational ist.[1]) Da nämlich tang $\pi = 0$ ist, so muß

$$\frac{\pi^2}{5} \dot{-} \frac{\pi^2}{7} \dot{-} \frac{\pi^2}{9} \dot{-} \cdots = 3$$

sein. Wäre nun π^2 eine rationale Zahl $r : s$, so müßte demnach

$$\frac{r}{5s} \dot{-} \frac{r}{7} \dot{-} \frac{r}{9s} \dot{-} \frac{r}{11} \dot{-} \cdots = 3$$

sein. Eine solche Gleichung ist aber unmöglich, da nach Nr. 14 die linke Seite irrational ist.

Bis nahezu zum letzten Viertel des vorigen Jahrhunderts hat man über die Natur der Zahlen e und π nicht mehr gewußt, als im vorstehenden angeführt ist. Heute ist dank der Untersuchungen von Ch. Hermite und F. Lindemann bekannt, daß beide Zahlen transzendent sind, d. h. keine von ihnen Wurzel einer ganzzahligen algebraischen Gleichung ist. Es kann also keine von beiden mit Hilfe von algebraischen Kurven und Flächen konstruiert werden: die Quadratur des Kreises ist unmöglich.[2])

1) Legendre, Eléments de Géométrie, Note 4.

2) Vgl. Ch. Hermite, „Sur la fonction exponentielle", Comptes rendus Bd. 77 (1873); F. Lindemann, Math. Annalen Bd. 20 (1882), S. 213; Weierstraß, Sitzungsber. d. Ak. Berlin 1885, S. 1067. — Eine Übersicht über die Geschichte des Problems der Quadratur des Kreises von den ältesten Zeiten bis auf Weierstraß gibt Rudio in der bereits erwähnten Schrift „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre".

Übungen zum X. und XI. Abschnitt.

1) Sind $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$ beliebige, reelle oder komplexe Zahlen und haben Z_r und N_r $(r = 0, 1, 2, \ldots n)$ für den Kettenbruch

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \tag{1}$$

die in X, 3 festgesetzte Bedeutung, so hat man, wenn nur Z_{n-1} bezw. N_{n-1} von Null verschieden ist,

$$\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = b_n + \frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_0} \tag{2}$$

und

$$\frac{N_n}{N_{n-1}} = b_n + \frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_1}. \tag{3}$$

Falls $Z_{n-1} = 0$ ist, sind beide Seiten der Gleichung (2) sinnlos und dasselbe gilt bezüglich (3), falls $N_{n-1} = 0$ ist."

Anleitung. Im Falle daß von den Zahlen Z_r bezw. N_r keine verschwindet, gelangt man durch wiederholte Anwendung der Formeln (II) in X, 3 zu den Gleichungen (2) und (3). Nimmt man dagegen an, daß sich unter den genannten Zahlen auch solche vom Werte Null vorfinden, so erreicht man das nämliche Resultat durch sinngemäße Anwendung der Formeln (15) und (16) in X, 2.

2) Ein endlicher Kettenbruch von der Form (1) heißt reziprok[1]), wenn er dem die nämlichen Elemente in umgekehrter Anordnung enthaltenden Kettenbruche

$$b_n + \frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_0}$$

gleich ist. Dazu, daß der Kettenbruch (1) reziprok sei, ist nach 1) erforderlich und hinreichend, daß $Z_{n-1} = N_n$ ist. Man beweise nun den folgenden Satz:

„Ein regelmäßiger Kettenbruch

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$$

ist dann und nur dann reziprok, wenn die Reihe der Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_n$ symmetrisch, d. h. wenn $b_r = b_{n-r}$ $\left(r = 0, 1, 2, \ldots; r \leqq \frac{n-1}{2}\right)$ ist."

3) Ganzzahlige Auflösung einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten mittels eines Kettenbruches (Methode von Lagrange). Es seien die Koeffizienten a, b der Gleichung

$$ax - by = 1 \tag{4}$$

1) Vgl. Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgem. Arithmetik und Algebra § 85 Nr. 15) und 16).

zwei natürliche und zueinander teilerfremde Zahlen. Verwandelt man den gemeinen Bruch $\frac{a}{b}$ nach X, 10 in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$b_0 + \frac{1}{b_1} \dot{+} \frac{1}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{b_n},$$

dessen vorletzter Näherungsbruch den Zähler Z_{n-1} und den Nenner N_{n-1} besitzt, so sind alle ganzzahligen Wurzelpaare x, y der Gleichung (4) durch die Ausdrücke

$$x = (-1)^{n-1} N_{n-1} + bu, \quad y = (-1)^{n-1} Z_{n-1} + au,$$

worin u jede ganze Zahl sein kann, dargestellt. Unter den nämlichen Voraussetzungen bezüglich a und b haben die Gleichungen

$$ax - by = c, \quad ax + by = c,$$

worin c eine reelle, ganze Zahl bedeutet, die ganzzahligen Wurzelpaare

$$x = (-1)^{n-1} c N_{n-1} + bu, \quad y = (-1)^{n-1} c Z_{n-1} + au$$

beziehungsweise

$$x = (-1)^{n-1} c N_{n-1} - bu, \quad y = (-1)^{n} c Z_{n-1} + au.$$

4) „Die beiden Kettenbrüche

$$K_{2n+2} \equiv \frac{1:x}{1} \dot{+} \frac{p_1:x}{1} \dot{+} \frac{p_2:x}{1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{p_{2n}:x}{1} \dot{+} \frac{p_{2n+1}:x}{1}$$

und

$$K'_{n+1} \equiv \frac{1}{x+p_1} \dot{-} \frac{p_1 p_2}{x+p_2+p_3} \dot{-} \frac{p\ p_4}{x+p_4+p_5} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{p_{2n-1} p_{2n}}{x+p_{2n}+p_{2n+1}}$$

sind bei jedem Werte von n $(n > 0)$ einander gleich[1]), d. h. es ist

$$K'_{n+1} = K_{2n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hierbei sind die Zahlen $x, p_1, p_2, p_3, \ldots$ willkürlich. Falls bei einer bestimmten Wahl dieser Zahlen der eine der beiden Kettenbrüche sinnlos wird, so wird es auch der andere."

Anleitung. Man kontrahiere den Kettenbruch K_{2n+2} mit Hilfe der in X, 8 abgeleiteten Formeln (α), (45) und (46), worin im vorliegenden Falle $n_r = 2r$ zu setzen ist. Dadurch gelangt man zu einem Kettenbruche, welcher mit dem obigen K'_{n+1} äquivalent ist.

5) Nebennäherungsbrüche eines regelmäßigen Kettenbruches (siehe S. 496, Note 2)). Es seien $K_0, K_1, K_2, \ldots K_{n-1}, K_n$ die aufeinander folgenden Näherungsbrüche des regelmäßigen Kettenbruches

$$K_n \equiv b_0 + \frac{1}{b_1} \dot{+} \frac{1}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{b_n}.$$

---

1) S. Günther, Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen, S. 75.

Ist $b_r > 1$ und setzt man

$$K_r(\nu) \equiv b_0 + \frac{1}{b_1} \dotplus \frac{1}{b_2} \dotplus \cdots \dotplus \frac{1}{b_{r-1}} \dotplus \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots b_r),$$

so ist $K_r(0) = K_{r-2}$ $(r \geqq 2)$ und $K_r(b_r) = K_r$. Bedeuten $Z_r(\nu)$ und $N_r(\nu)$ Zähler und Nenner des Nebennäherungsbruches $K_r(\nu)$, so besteht die Beziehung

$$Z_r(\nu+1) \cdot N_r(\nu) - N_r(\nu+1) \cdot Z_r(\nu) = (-1)^r$$
$$(1 \leqq r \leqq n; \quad 0 \leqq \nu \leqq b_r - 1).$$

Daraus folgt für $2 \leqq r \leqq n$

$$K_{r-2} < K_r(1) < K_r(2) < \cdots < K_r(b_r - 1) < K_r$$

oder

$$K_{r-2} > K_r(1) > K_r(2) > \cdots > K_r(b_r - 1) > K_r,$$

je nachdem r gerade oder ungerade ist. Aus diesem Grunde sagt man, die Nebennäherungsbrüche $K_r(1)$, $K_r(2)$, ... $K_r(b_r - 1)$ seien zwischen K_{r-2} und K_r eingeschaltet.

Zwischen dem Näherungsbruche K_{r-1} und einem Nebennäherungsbruche $K_r(\nu)$ besteht die Beziehung

$$Z_{r-1} \cdot N_r(\nu) - N_{r-1} \cdot Z_r(\nu) = (-1)^n$$

d. i.

$$K_{r-1} - K_r(\nu) = \frac{(-1)^n}{N_{r-1} \cdot N_r(\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \cdots b_r - 1).$$

6) Nach S. Günther[1]) läßt sich der Zähler $Z^{(n)}$ des aufsteigenden Kettenbruches

$$K^{(n)} = \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n$$

durch die Determinante

$$Z^{(n)} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

darstellen. — Dies läßt sich auf Grund der Formeln

$$Z^{(r)} = b_r Z^{(r-1)} + a_r \quad (r = 2, 3, \cdots n)$$

mittels des Schlusses von r auf $r + 1$ leicht bestätigen.

---

1) a. a. O. S. 42.

7) „Wenn die positiven Zahlen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ bei wachsendem Index schließlich monoton bleiben, so bildet die Divergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty \sqrt{h_\nu h_{\nu+1}}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{1}{h_\nu}\right]_1^\infty$."[1] (Vgl. Satz 4) in XI, 3.)

Um den vorstehenden Satz zu beweisen, zeige man zunächst, daß unter der hier getroffenen Voraussetzung die beiden Reihen

$$\sum_1^\infty h_\nu \quad \text{und} \quad \sum_1^\infty \sqrt{h_\nu h_{\nu+1}}$$

zugleich konvergent oder zugleich divergent sind, und wende hierauf den Satz 1) in XI, 3 an.

8) Der Kettenbruch $\left[\frac{\nu^p}{1}\right]_{\nu=1}^\infty$ konvergiert, wenn $0 \leqq p \leqq 2$ ist.

9) Der Kettenbruch $\left[\frac{x^\nu}{1}\right]_{\nu=1}^\infty$ konvergiert, wenn $0 < x \leqq 1$ ist.

10) Der Kettenbruch $\left[\frac{1}{x^\nu}\right]_{\nu=1}^\infty$ konvergiert, wenn $x \geqq 1$ ist, dagegen oszilliert er, wenn $0 < x < 1$ ist.

11) Man beweise, daß zwei reduziert-regelmäßige unendliche Kettenbrüche nur dann einander gleich sind, wenn sie identisch sind.

12) Man zeige, daß der unendliche Kettenbruch

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{0} \dot{-} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{4}{0} \dot{-} \frac{4}{1} \dot{-} \frac{9}{0} \dot{-} \frac{9}{1} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{n^2}{0} \dot{-} \frac{n^2}{1} \dot{-} \cdots$$

mit der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

äquivalent ist. (Vgl. XI, 6.)

13) Der unendliche Kettenbruch

$$\frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{3} \dot{-} \frac{4}{5} \dot{-} \frac{9}{7} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{(n-1)^2}{2n-1} \dot{-} \cdots$$

ist mit der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

---

1) Pringsheim, Ber. d. bayr. Ak. Bd. 29 (1899), S. 266. Daselbst S. 268 findet sich auch das Beispiel 8).

äquivalent; somit divergiert er. Daraus folgt

$$1 \dot{-} \frac{1}{3} \dot{-} \frac{4}{5} \dot{-} \frac{9}{7} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{(n-1)^2}{2n-1} \dot{-} \cdots = 0.$$

14) „Der unendliche Kettenbruch

$$1 - \frac{a_1}{1} \dot{-} \frac{a_2}{1} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{a_n}{1} \dot{-} \cdots,$$

in welchem die Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ sämtlich reell und positiv sein sollen, konvergiert unbedingt, wenn für jeden Wert von n

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < 1$$

ist. Sein Grenzwert K ist kleiner als 1 und dabei nicht negativ."

Anleitung. Man zeige zunächst, daß Zähler und Nenner sämtlicher Näherungsbrüche positiv sind, so daß auch $K_n > 0$ ist. Mit Hilfe der Formel (VI) S. 477 findet man sodann

$$K_n < K_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Demnach konvergiert der Kettenbruch zufolge des Satzes in XI, 6 unbedingt und man hat $K < K_0$, d. i. $K < 1$.

15) Man weise nach, daß der in 14) definierte Kettenbruch, falls

$$\sum_1^\infty a_n < 1$$

ist, nicht den Wert Null haben kann.

16) Wie M. A. Stern[1]) gezeigt hat, konvergiert der unendliche Kettenbruch

$$2 - \frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{2^3} \dot{-} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{2^5} \dot{-} \cdots \dot{-} \frac{1}{1} \dot{-} \frac{1}{2^{2n+1}} \dot{-} \cdots$$

Man weise die Konvergenz desselben mittels des Satzes 3 in XI, 8 nach.

17) „Der alternierende unendliche Kettenbruch

$$b_0 - \frac{1}{b_1} \dot{+} \frac{1}{b_2} \dot{-} \frac{1}{b_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{(-1)^n}{b_n} \dot{+} \cdots$$

konvergiert unbedingt, wenn eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit existiert, daß für alle Werte $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_{2n} b_{2n+1} \geqq 1 + \delta$$

ist." (Vgl. Satz 4 in XI, 7.)

18) „Gibt es eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, daß für alle Werte $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{b_{2n} b_{2n+1}}{a_{2n+1}} \geqq 1 + \delta$$

1) Göttinger Nachrichten 1863, S. 143.

ist, so konvergiert der alternierende unendliche Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} + \cdots + (-1)^n \frac{a_n}{b_n} + \cdots \qquad (5)$$

unbedingt." — Dieser Satz ergibt sich aus 17) durch entsprechende Transformation des Kettenbruches (5).

19) „Der alternierende unendliche Kettenbruch (5) konvergiert unbedingt, wenn

$$b_{2n} b_{2n+1} \geqq a_{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist und die unendliche Reihe

$$\frac{1}{a_1} b_1 + \frac{a_2}{a_1 a_3} b_3 + \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3 a_5} b_5 + \cdots$$

divergiert." (Vgl. Satz 3 in XI, 7.)

20) „Ist von den reellen Zahlen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ keine negativ und für alle Werte $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$\frac{b_{2n} b_{2n+1}}{a_{2n+1}} = 1 + \delta_n,$$

so ist der alternierende unendliche Kettenbruch (5) unbedingt konvergent, wenn die unendliche Reihe

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n + \cdots$$

divergiert." (Vgl. Satz 4 in XI, 7.)

21) „Der alternierende unendliche Kettenbruch

$$1 - \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} - \frac{a_3}{1} + \cdots + (-1)^n \frac{a_n}{1} + \cdots \qquad (6)$$

konvergiert unbedingt, wenn es eine positive Zahl $\delta < 1$ von der Beschaffenheit gibt, daß für alle Werte $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Beziehung $a_{2n+1} \leqq \delta$ stattfindet." (Vgl. Übung 18).)

22) „Wenn die Teilzähler des Kettenbruches (6) den Bedingungen

$$a_{2n+1} \leqq 1 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

genügen und das unendliche Produkt

$$\prod_1^\infty{}_n \, a_{2n+1}$$

den Grenzwert Null hat, so konvergiert der Kettenbruch unbedingt." (Vgl. Übung 20).)

23) In dem Kettenbruche $K \equiv \left[\frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ seien die ε_ν reelle oder komplexe Zahlen vom Betrage 1; die a_ν und b_ν seien reelle positive Zahlen, welche der Relation $b_\nu \geqq a_\nu + 1$ genügen. Nach dem Satze 1a in XI, 8

konvergiert dieser Kettenbruch unbedingt. Man weise nun die folgenden Eigenschaften desselben nach:

$\alpha)$ $|K - K_n| \leqq \frac{1}{|N_n|}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$.

$\beta)$ $|Z_n| - |Z_{n-1}| \geqq a_1 a_2 \cdots a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$\gamma)$ $|N_n - Z_n| \geqq |N_{n-1} - Z_{n-1}| \geqq 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

$\delta)$ Falls die unendliche Reihe

$$1 + a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n + \cdots$$

divergiert, ist $\lim\limits_{n=+\infty} |N_n| = +\infty$.

Anleitung. Um die Beziehung $\alpha)$ zu erhalten, benütze man die Formel (IX, b) in X, 5, worin $k = n$ zu nehmen ist, und beachte, daß nach XI, 8 $|K_n| < 1$ und daher auch $|R_{n+2,n+r}| < 1$. Hierauf berücksichtige man noch die Relation (6) S. 539. Die übrigen Beziehungen $\beta)$, $\gamma)$ und $\delta)$ ergeben sich in ähnlicher Weise, wie die soeben genannte Relation (6).

24) „Der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, in welchem $|\varepsilon_\nu| = 1$ ist, während die Teilnenner b_ν beliebige, reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, konvergiert unbedingt, wenn

$$|b_1| \geqq 2 \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{b_{2n}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2n+1}}\right| \leqq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist." (Vgl. Satz 2 in XI, 8.)

25) „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, worin die Teilzähler a_ν beliebige reelle oder komplexe Zahlen vorstellen, konvergiert unbedingt, wenn

$$|a_{2n}| + |a_{2n+1}| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist." (Vgl. Satz 3 in XI, 8.)

26) Als Folgerungen aus dem Satze 3 in XI, 8 hat Pringsheim die folgenden Sätze angegeben, worin die a_ν, bezw. auch die b_ν reell oder komplex sein können:

$\alpha)$ „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ist unbedingt konvergent, wenn

$$|a_2| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad |a_\nu| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\nu = 3, 4, 5, \cdots)$$

ist."

$\beta)$ „Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist unbedingt konvergent, wenn

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-2} b_{2n-1}}\right| + \left|\frac{a_{2n}}{b_{2n-1} b_{2n}}\right| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

ist, also insbesondere, wenn

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\nu = 3, 4, 5, \cdots)$$

ist."

27) Der alternierende und periodische unendliche Kettenbruch

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \cdots$$

hat den Wert $(1+\sqrt{5}) : 2$. Bezeichnet man mit $c_0, c_1, c_2, \ldots$ die aufeinander folgenden Laméschen Zahlen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (vgl. XI, 12), so ist

$$Z_{2n} = N_{2n+2} = c_n, \quad Z_{2n+1} = c_{n+2}, \quad N_{2n+1} = c_{n+1}.$$

28) Divergenzkriterium für periodische Kettenbrüche von Pringsheim.[1]) — „Haben N_{m-1}, D und S für den rein periodischen Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_m}{b_m} + \frac{a_1}{b_1} + \cdots$$

die in XI, 10 festgesetzte Bedeutung, so divergiert derselbe, wenn

$$|N_{m-1}| > 0 \quad \text{und} \quad |D| > 0$$

ist, während der reelle Bestandteil des Quotienten $S : \sqrt{D}$ verschwindet." — Man findet nämlich unter dieser Voraussetzung $|S - \sqrt{D}| = |S + \sqrt{D}|$. (Vgl. den Satz in XI, 10.)

29) Man beweise, daß der reduziert-regelmäßige Kettenbruch, in den sich jede reelle irrationale Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten entwickeln läßt, periodisch ist. (Vgl. XI, 13.)

30) Man beweise den am Schlusse von XI, 14 angeführten Satz.

31) Man zeige, daß

$$e = 2 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \cdots + \frac{n}{n} + \cdots$$

ist. (Vgl. Beispiel 3) in XI, 15.)

32) Mittels der Formel (F) in XI, 15 gewinnt man noch die folgenden Kettenbruchentwicklungen für $\sin x$ und $\cos x$:

$$\sin x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2} + \frac{2 \cdot 3 x^2}{4 \cdot 5 - x^2} + \cdots + \frac{(2n-2)(2n-1)x^2}{2n(2n+1) - x^2} + \cdots,$$

$$\cos x = \frac{1}{1} + \frac{x^2}{2 - x^2} + \frac{2x^2}{3 \cdot 4 - x^2} + \frac{3 \cdot 4 x^2}{5 \cdot 6 - x^2} + \cdots + \frac{(2n-3)(2n-2)x^2}{(2n-1) \cdot 2n - x^2} + \cdots$$

33) Daß die Unbestimmtheitsgrenzen von $\sin n\theta$, unter n jede natürliche Zahl verstanden, bei $\lim n = +\infty$ im Falle, daß $\theta : \pi$ irrational ist, -1 und $+1$ sind, wird vermittelst der Entwicklung von $\theta : \pi$ in einen regelmäßigen Kettenbruch bewiesen.

---

1) Ber. d. bayer. Ak. Bd. 30 (1900), S. 480.

Berichtigungen zur „theoretischen Arithmetik".

S. III, Z. 13 lies der statt die.
S. 18, Z. 4 u. 3 v. u. „und 3" ist zu streichen.
S. 19, Z. 1 u 2 statt „und 3. Falle beide" lies „Falle $a' - b'$, im 3. $a - b$." — Statt „sind" lies „ist".
S. 44, Z. 28 u. 29 der Vordersatz: „Wenn neben ... feststeht" ist zu streichen.
S. 55, Z. 18 lies 5 statt 4.
S. 97, Z. 24 lies X^m statt X^n.
S. 112, Note 3 lies S. 100 statt 160.
S. 138, Note 1 Z. 2 lies 74 statt 84
S. 143, Note 1 lies $n > \nu$ statt $n < \nu$.
S. 154, Z. 5 v. u. lies (S_n) statt (S_m).
S. 203, Z. 8 lies diese statt die.
S. 248, Z. 11—15 ist durch folgendes zu ersetzen: „indirekt zu beweisen. Angenommen, die Reihe (5) divergiere, während die Reihe (1) konvergiert. Zunächst bemerken" Z. 16—19 bleibt. Dann schalte ein: „Nunmehr läßt sich zeigen, daß man die Glieder a_n erstens so anordnen kann, daß die neue Reihe divergiert (vgl. Note 1)) und zweitens so, daß die neue Reihe konvergiert und dabei ihr Grenzwert eine vorgegebene Zahl K ist."
S. 340, Z. 16 nach (16) schalte ein: „und die daraus durch zyklische Vertauschung der Buchstaben A, B, C einer- und A', B', C' andererseits hervorgehenden".
S. 382, Z. 7 nach θ schalte ein: „$(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$".
S. 394, Übung 10) Zusatz. Ausgeschlossen sind jedoch die Wertepaare $\alpha = -1$, $\beta = 0$ und $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Im Falle des ersteren kann der Grenzwert von $\theta(n)$ bei $\lim n = +\infty$ entweder π oder $-\pi$ sein. Im Falle des letzteren hat man bloß $\lim \varrho(n) = 0$.
S. 395, Z. 24 füge bei: „$1 + 0 = 1$".

Berichtigungen und Nachträge.

Außer den S. 242 angeführten Berichtigungen ist folgendes zu bemerken:

S. 1, Note 2), Z. 3 nach „analytischer“ schalte ein: Beweis.

S. 10, Z. 22 lies: VIII 4, 7* statt: VIII. 7.

S. 86, Z, 7 lies: T. VIII statt: T. V. Die genannte Abhandlung von Arzelà ist deutsch bearbeitet von J. T. Pohl und B. Rauchegger im XVI. Bd. der Monatshefte für Math. u. Phys.

S. 90, Z. 20 lies: festgewähltem statt: festgewählten.

S. 104, Z. 3 v. u. lies: $+\pi$ statt: $\pm\pi$.

S. 105, Z. 8 lies: $y < 0$ statt: $y \leqq 0$.

S. 109, Z. 1 lies: $\psi(\tau)$ statt: $\psi)\tau)$.

Z. 14 schalte nach „wenn“ ein: „die Koordinaten $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ der Funktion $f(\tau)$ bei lim $\tau = \tau_0$ je einen Grenzwert haben und“.

S. 116, Z. 13 v. u. lies: sich selbst nicht schneidet statt: sich selbst schneidet. In der angegebenen Weise wurde der Satz, daß jede einfache geschlossene Linie die Ebene in zwei Gebiete trennt, von C. Jordan (C d'Analyse, 2 éd. I § 102) bewiesen. Neuer Beweis desselben v. L. D. Ames (Bull. of the American math. soc. X. p. 301).

S. 121, Z. 15 ist ähnlich wie S. 109, Z. 14 zu ergänzen.

S. 127, Z. 17 füge nach „bleibt“ hinzu: „mit Einschluß des Punktes c“.

S. 144, Z. 8 lies: $F(x)$; $F'(x)$ anstatt: $F(x)$, $F'(x)$.

S. 165, Z. 9 v. u. lies: IX. 11 statt: IX. 9.

S. 192, Z. 6 nach „kann“ füge bei: Vgl. S. 333, Übung 6).

S. 216, Z. 19 nach „ganzen“ schalte ein: „positiven“.

S. 228, Z. 5 v. u. lies: K, L jedes Paar positiver Zahlen statt: K jede Zahl.

S. 237, Z. 14 lies: eine negative ganze Zahl statt: reell und negativ.

S. 238 füge hinzu die Übung: 6*) Unter der Voraussetzung, daß x nicht gleich 1 ist, entwickle man beide Seiten der Identität

$$1 + (x+u) + (x+u)^2 + \cdots + (x+u)^n = \frac{1-(x+u)^{n+1}}{1-x-u}$$

nach steigenden Potenzen von u und setze die Koeffizienten der nämlichen Potenzen von u auf beiden Seiten des = einander gleich.

S. 241, Z. 15 lies: $m + k - 2$ statt: $n + k - 2$.

S. 249, Z. 5 lies: μ_0 statt: μ.

S. 264. Zu Z. 5 v. u. füge hinzu: „Wie aus dem Kriterium (2) unmittelbar hervorgeht, kann man auch im Falle, daß der Ausdruck hinter dem Zeichen $\overline{\lim}$ auf der linken Seite von (8) oder (9) die obere Unbestimmtheitsgrenze Null hat und dabei für $n \geqq m$ nirgends positiv ist, noch mit Sicherheit auf die Divergenz der Reihe Σa_n schließen".

S. 289, Formel (1) lies: $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$.

S. 317, Z. 17—18 lies: erzeugendes statt: zu erzeugendes

S. 341, Note 1), Z. 3 lies: S. 356 statt: S. 357.

S. 385, Z. 12 lies: $(l+2)^s$ statt: $(l+r)^s$.

S. 386, l. Z. Mittels des Verfahrens, wonach „Arithmetik" S. 235 die Divergenz der harmonischen Reihe gezeigt wurde, gelangt man zu den genaueren Ungleichungen

$$S_l(g) < (l-1) : (l^{g-1} - 1)$$
$$S_l(g) > \frac{1}{l^g}\left\{1 + \frac{l-1}{l^{g-1}-1}\right\} \quad (g \geqq 2).$$

S. 387, Formel (6) lies r^t statt r_t.

S. 399 füge die weitere Übung bei: 39) „Wie S. 233 bedeute $G(x, y)$ eine ganze Funktion oder eine konvergente ganze Potenzreihe von x, y, und x_0, y_0 ein Wertepaar, wofür $G(x_0 y_0) = 0$ ist. Nach Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelt sei

$$G(x,y) =$$
$$G_{10}(x_0y_0)(x-x_0) + G_{01}(x_0,y_0)(y-y_0) + \cdots + G_{r,s}(x_0,y_0)(x-x_0)^r(y-y_0)^s + \cdots$$

Wenn nun $G_{01}(x_0, y_0)$, $G_{02}(x_0, y_0) \ldots G_{0,m-1}(x_0, y_0)$ verschwinden, $G_{0,m}(x_0, y_0)$ und $G_{1,0}(x_0, y_0)$ von Null verschieden sind, so gibt es eine und nur eine konvergente ganze Potenzreihe von $\sqrt[m]{x - x_0}$ ohne konstantes Glied, welches für y in die Gleichung $G(x,y) = 0$ eingesetzt, sie identisch erfüllt". — Zufolge des Satzes 3, S. 233 genügt der genannten Gleichung eine ganze Potenzreihe von der Form

$$x - x_0 = c_m(y - y_0)^m + c_{m+1}(y - y_0)^{m+1} + \cdots.$$

Setzt man hier $x - x_0 = c_m t^m$ und zieht nach der Formel (ε) S. 380 die m^{te} Wurzel aus, so findet man

$$t = (y - y_0) + \frac{c_{m+1}}{m c_m}(y - y_0)^2 + \cdots.$$

Kehrt man diese Reihe nach dem 4. Satze S. 233 um, so erhält man für $y - y_0$ die angegebene Entwicklung.

NB. Ist $G(x,y)$ eine ganze rationale Funktion von xy, so kann man die Reihenentwicklungen für $y = y_0$ auch im Falle, daß beide Koeffizienten $G_{10}(x_0, y)$, $G_{01}(x_0, y_0)$ verschwinden, leicht mit Hilfe des 3. Satzes S. 233 ermitteln. Vgl. Stolz Grundzüge der Diff.- und Int.-Rechnung I. S. 182f.

S. 411, Z. 19 lies: dasselbe statt: daselbe.

S. 432, Z. 3 lies: $\prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + g_r(x))$ statt: $\prod_{n+1}^{\infty}{}_r (1 + g_n(x))$.

S. 447, Z. 1 lies: 2π statt: π.

S. 450, nach der l. Z. füge hinzu: Diese Reihe für $\frac{1}{e^y+1}$ ergibt sich auch unmittelbar aus der folgenden für $\frac{1}{e^y-1}$ vermöge der Identität

$$\frac{2}{e^{2y}-1} = \frac{1}{e^y-1} - \frac{1}{e^y+1}.$$

S. 461, Z. 7 v. u. lies: $\prod_{1}^{\infty}{}_r$ statt: $\prod_{1}{}_r$.

S. 468, Z. 18 v. u. lies: $Z_{n-1,n}$ statt: $Z_{n,-1,n}$.

S. 505, in Formel (1) lies: n statt: r.

S. 511, zweite Formel (11) lies: $\sum_{1}^{\infty}{}_r$ statt: $\sum_{0}^{\infty}{}_r$.

S. 514, Z. 7 v. u. Die von O. Perron der Münchener Ak. im Juli d. J. vorgelegte „Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern“ konnte nicht mehr berücksichtigt werden.

Sachenverzeichnis.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten. — N. = Note.)

Abbildung, winkeltreue (isogonale oder konforme) 129.
Ableitungen einer Potenzreihe 189; partielle 229.
Ableitungen einer Punktmenge 68.
Ableitungen von ganzen Funktionen 143; partielle 145.
Abszisse 61.
Achsen 61.
Additionstheorem des Arcus sinus 372; des Arcus tangens 368.
Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen 348, 349.
Äquivalenz 484; eines unendlichen Produktes und einer unendlichen Reihe 402; zweier Kriterien 256.
Anfangsglied eines Kettenbruches 465, 505.
Arcus cosinus 394.
Arcus cotangens 369.
Arcus sinus 49, 370.
Arcus-sinus-Reihe 374.
Arcus tangens 49, 365.
Arcus-tangens-Reihe 367.
Argument 7.
Assoziativität eines unendlichen Produktes 403.
Auflösung einer linearen Gleichung, ganzzahlige 583.
Ausdruck, analytischer 9.

Bereich einer Veränderlichen 1, 114.
Bereich, einfach begrenzter 115.
Bestimmungsgleichung 9.
Binomialreihe 356.
Bogen, konvexer 62.

C (siehe unter K).

Darstellung einer Funktion, analytische 9, 118.
Differentialquotient 64.
Differenzenprodukt 172.
Differenzenrechnung 161.
Differenzreihen 160.
Dimension 8, 137.
Distributivität eines unendlichen Produktes 417.
Divergenz eines Kettenbruches 507.
Divergenz eines unendlichen Produktes 400; unbedingte 415.
Divergenzkriterien für periodische Kettenbrüche 559, 590.

Ecke 63.
Element eines Kettenbruches 465, 505.
Ergänzung eines Näherungsbruches 518, N.
Exponentialfunktion 8, 37, 345.
Exponentialreihe 345.

Fläche, einfach zusammenhängende 115.
Form (binäre, ternäre; lineare, quadratische, kubische) 138; bestimmte, halbbestimmte und unbestimmte 160.
Form einer rationalen Funktion, reduzierte 149, 153.
Form eines Kettenbruches, reduzierte 485, 510; alternierende 510.
Formen unendlicher Reihen, typische 248, N.
Fortsetzung einer Funktion 303; einer stetigen Funktion 106.
Fundamentalsatz der Algebra 153; der homogenen Funktionen 146.
Funktion, abteilungsweise monotone 60; algebraische 10, 318; allgemeine Bernoullische 398; alternierende 138; eindeutige 7, 76, 117, 131; eindeutige analytische mit isolierten singulären Punkten 318; endliche 7; ganze oder ganze rationale 7, 8, 137; ganze transzendente 176, 222, 334; ganzzahlige ganze 137; gebrochene rationale 7,

138; gerade 237; holomorphe oder holotrope 182, 227; homogene 8, 137, 138; irreduzible 149, 153; komplexe, einer reellen Veränderlichen 108; längs einer Linie fortsetzbare 313; logarithmische 8, 38; mehrdeutige 7, 126; meromorphe 182; monodrome oder monotrope 125; monogene analytische 119, 302, 316; monotone 15, 55; monotone erster Art 247, 252; monotone zweiter Art 247; periodische 334; rationale 137; reelle 7; stetige 36, 44, 109, 123; symmetrische 138; transzendente 10; umgekehrte 48; ungerade 237; zusammengesetzte 9.
Funktionen, Bernoullische 166; ein- und mehrdeutige monogene 317; hyperbolische 73, 391; teilerfremde 147; trigonometrische 8, 39, 347.
Funktionselement 303, 316.

Gesamtänderung einer Funktion 58.
Gleichung, algebraische 10; einem periodischen Kettenbruche zugehörige quadratische 551; identische 9.
Glied eines Kettenbruches 465, 500, 505.
Grad einer ganzen Funktion 7, 137.
Grade des Nullwerdens und des Unendlichwerdens 27.
Grenze einer Punktmenge 67.
Grenze einer Veränderlichen, obere 2; untere 4.
Grenzen einer Funktion bei einem Grenzübergange 20, 103.
Grenzpunkt 66, 100; für die Fortsetzbarkeit einer Funktion 311.
Grenzwert, eigentlicher 4; uneigentlicher 5.
Grenzwert einer Funktion 11, 108, 120; eines Kettenbruches 507.

Halbtangente 63.
Hauptform eines Kettenbruches 486, 510.
Hauptwert der Potenz 340, 344, 355; des Arcus cotangens 369; des Arcus tangens 49, 365; des Logarithmus 350.
Hauptwerte des Arcus sinus 49, 370.
Hauptzweig des Arcus tangens 366; des Logarithmus 352.
Hauptzweige des Arcus sinus 371.
Holomorphie 182; für $x = \infty$ 198.
Homogenmachen von Gleichungen 159, N.

Identitätssätze für ganze Funktionen 138, 171, 172.
Interpolationsformeln 167.
Intervall 6, 7.
Irrationalitätssatz von Legendre 570.

Kettenbruch, absteigender 500; alternierender 533; aufsteigender 500; eigentlicher 470, 506; endlicher 465; gewöhnlicher aufsteigender 502; periodischer 550; reduzierter 467, N.; reduziert-regelmäßiger 498, 525; regelmäßiger (einfacher, gewöhnlicher oder natürlicher) 491, 518; reziproker 583; unbestimmter 506; uneigentlicher 470, 506; unendlicher 505.
Kettenbruchdeterminante 474.
Kettenbrüche, äquivalente 484; gleichartige 507.
Kommutativität unendlicher Produkte 413.
Konstante 7; Eulersche 385.
Kontraktion eines Kettenbruches 488.
Konvergenz einer Funktion, gleichmäßige 79.
Konvergenz einer unendlichen Reihe, absolute 243; gleichmäßige 82, 132.
Konvergenz eines unendlichen Kettenbruches 507; bedingte 529; unbedingte 529.
Konvergenz eines unendlichen Produktes 400; absolute 415; bedingte 415; gleichmäßige 426; unbedingte 411, 415.
Konvergenzkreis 176.
Konvergenzprinzip 21, 109, 123.
Konvergenzradius 176.
Kosekantenreihe 449.
Kosinus 347; hyperbolischer 73, 391.
Kosinusreihe 347.
Kreisfunktionen 348.
Kreiskonchoide 288, N.
Kreisverwandtschaft 130.
Kriterien, äquivalente 256; disjunktive 264, 265, 295; erster und zweiter Art 245, logarithmische 258, 261, 267; schwächere und schärfere 245.
Kriterienfolge, geordnete 245.
Kriterienpaar 244, 262.
Kriterium der Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe 243; disjunktives 262.

Lage, perspektivische 129.
Linie, reguläre 116, 306; stetige 61.
Logarithmus 8; natürlicher 350.

Mannigfaltigkeit 99.
Meromorphie 182.
Monogeneität 302, 316.
Multiplikation unendlicher Reihen 288.

Nachbarpunkte 306.
Näherungsbruch 471, 501, 505; mittelbarer 496.
Näherungsnenner 471, 501.
Näherungszähler 471, 501.
Nebennäherungsbruch 496, N., 584.
Nebenwerte des Logarithmus 350.
Nenner eines Kettenbruches 467.

Ordinate 61.
Ordnung einer Punktmenge 68.

Partialbruchzerlegung trigonometrischer Funktionen 444.
Partialbrüche 194.
Partialprodukt 400.
Periode einer Funktion 127; eines Kettenbruches 550; der Exponentialfunktion 351; des Sinus und Kosinus 348.
Pol einer Funktion 183.
Potenz, allgemeine oder künstliche 355; mit komplexer Basis und reellem Exponenten 340; natürliche 345.
Potenzfunktion 8, 38, 356.
Potenzreihe, abgeleitete 189; beständig konvergente 176, 222; ganze 174.
Prinzip der Reihenvergleichung 243.
Produkt, unendliches 400.
Produktformel für $\frac{1}{2}\pi$ 442.
Proportionalität, gerade und verkehrte 7.
Punkt, außerwesentlich singulärer 183; eines Bereiches 76; isolierter 69, 100; singulärer 311; uneigentlicher 117; wesentlich singulärer 198.
Punkte, benachbarte 306.
Punktmenge, abgeschlossene oder vollständige 68; abzählbare 68; geordnete 68; nicht-abzählbare 69; überall dichte 69.
Punktmengen erster und zweiter Gattung 68.

Quotient von ganzen Funktionen 142.

Radienvektoren, reziproke 136.
Rand, einfacher 115.
Raum, m-dimensionaler 99.
Reduktion eines Kettenbruches 484.
Reihe, binomische 356; Gaußsche 237; logarithmische 357; nach ganzen Potenzen 195; rekurrente 192.
Reihen, arithmetische 163; harmonische 384, 390; hypergeometrische 237, N., 300; stärker und schwächer konvergente und divergente 246.
Rest von ganzen Funktionen 142.

Satz, polynomischer 380.
Schnitt, positiver und negativer 353.
Schranke 1.
Schwankung einer Funktion 53.
Sekantenreihe 452.
Sinus 347; hyperbolischer 73, 391.
Sinusreihe 347.
Spitze 63.
Stärke der Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe 246.
Stelle eines Bereiches 76.
Stetigkeit einer Funktion 36, 44, 93; gleichmäßige 53, N.
Streckenverhältnis 134.
Substitution einer neuen Veränderlichen 14, 25.

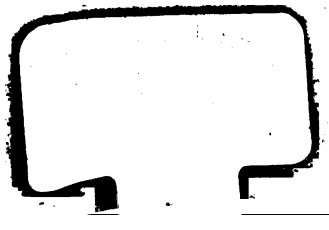
Tangente 63.
Tangentenkoeffizienten 450, 462, 463.
Tangentenreihe 449.
Teilbarkeit der ganzen Funktionen 141, 147.
Teilbruch eines Kettenbruches 465, 500, 505.
Teiler einer ganzen Funktion 141; größter gemeinsamer 147, 152.
Teilnenner 465, 500, 505.
Teilzähler 465, 500, 505.
Transformation eines Kettenbruches 483.
Transzendenz der Exponentialfunktion 345; der Potenzfunktion 356; des Logarithmus 352.

Umgebung einer Stelle 96.
Umkehrung einer Funktion 48; einer Reihe 233.
Unbestimmtheitsgrenzen 20.
Unendlichkeitspunkt 117.
Unendlichsein von Funktionen 10.
Unendlichwerden, bestimmtes und unbestimmtes 12; einer komplexen Funktion 109, 121, 592.
Unstetigkeit, nicht hebbare 73.

Veränderliche, endliche 4; komplexe 114; reelle 1; stetige 5, 115; unendlich kleine 5.
Vergleichsreihe 243.

Wendepunkt 63.
Wert einer Funktion 7, 8; einer Veränderlichen 1; eines Kettenbruches 467, 507.
Wurzeln einer ganzen Funktion 145; unendliche 159, N.

Zähler eines Kettenbruches 467.
Zahl, isolierte 69; Ludolphsche 521; uneigentliche oder unendliche 6.
Zahlen, Bernoullische 165, 449; Eulersche 452, 463; Lamésche oder Schimpersche 561.
Zahlenmenge 68, 69.

DUE APR 9 1920

DUE JAN 1925